



Processeurs SAR Basés sur des Détecteurs de Sous-Espaces

Rémi Durand

► To cite this version:

Rémi Durand. Processeurs SAR Basés sur des Détecteurs de Sous-Espaces. Electromagnétisme. Université Paris X - Nanterre, 2007. Français. NNT : . tel-01286560

HAL Id: tel-01286560

<https://theses.hal.science/tel-01286560>

Submitted on 11 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Processeurs SAR Basés sur des DéTECTEURS de Sous-Espaces

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 30 novembre 2007

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université Paris X

(spécialité Traitement du Signal)

par

Rémi DURAND

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Pr. Olivier BESSON	(ENSICA Toulouse)
	Dr. Florence TUPIN	(ENST Télécom Paris)
<i>Examineurs :</i>	M. François LE CHEVALIER	(Thalès)
	Pr. Philippe FORSTER	(Directeur de Thèse, Université Paris 10)
	Dr. Guillaume GINOLHAC	(Encadrant Université Paris 10)
	Dr. Laetitia THIRION	(Encadrante SONDRRA)
	M. Marc LESTURGIE	(Directeur de SONDRRA)

Remerciements

Trois ans d'aventures doctorales se sont achevées et chaque nouvelle seconde passée à me remémorer ma petite épopée voit la liste des gens à remercier s'allonger. Je vais donc essayer de n'oublier personne, tout en sachant que je n'y arriverai peut être pas... Pour toute réclamation, veuillez déposer une plainte auprès de mon successeur F.B. !

Ayant effectué ma thèse au sein du laboratoire SONDRRA dans d'excellentes conditions, je souhaiterais tout d'abord remercier les quatre partenaires qui en sont à l'origine : la DSTA et NUS pour Singapour, Supélec et l'ONERA pour la France, ainsi que notre duo de "technical managers" : Marc Lesturgie (maintenant directeur) et Walid Tabbara.

Merci aux membres du jury d'avoir accepté d'assister à ma soutenance. Merci aux deux rapporteurs Florence Tupin et Olivier Besson qui ont courageusement relu attentivement ce manuscrit pendant la période estivale. C'est un grand honneur pour moi d'avoir eu l'opinion sur mon travail de deux grands chercheurs comme vous. Merci à François Le Chevalier qui, malgré un emploi du temps plus que chargé, a pu se libérer pour apporter son point de vue d'expert sur mon sujet.

J'aimerais aussi chaleureusement remercier toutes les personnes qui m'ont aidé lors de mes fréquents séjours à l'ONERA : merci à Philippe Dreuillet de m'avoir permis de travailler sur les images SAR bande P, un grand merci à Elise et Philippe Fargette qui ont tout fait pour m'assister et faciliter mon travail.

Le plaisir que j'ai eu à effectuer cette thèse, la richesse et la variété de ce que j'ai appris, la qualité (j'ose !) du travail effectué doivent énormément à mes trois encadrants : Laetitia Thirion, Philippe Forster et Guillaume Ginolhac. Philippe, grand maître du traitement du signal et observateur curieux mais attentif de nos nouvelles technologies (comme le désormais célèbre powerball), tu as mon admiration éternelle et tu resteras un modèle pour moi (j'ai déjà commencé à te copier quant à mes destinations professionnelles, reste à devenir intelligent...). Guillaume, PhD architect, business manager et amoureux des différentes richesses de notre terroir national, merci pour ta présence au quasi quotidien, ton aide, ton soutien, ton amitié et nos nombreux échanges entre six yeux (je compte Mathias évidemment). Que ton vélo prenne toujours les pistes les plus clémentes qui te mèneront auprès des tiens. Laetitia, enfin (last but not least !), coach de tous les jours, défenseuse acharnée du thésard et de l'orphelin, merci pour ta vision très humaine de ces drôles de bestioles que sont les doctorants, merci pour tes nombreux encouragements tout au long de cette thèse ("c'est cool ce que tu as fait !") et pour la rigueur que tu as, malgré tout, toujours su conserver ("Rémi, chapitre 3, paragraphe 2, ça veut rien dire..."). A tous les trois, merci d'avoir cru en moi, j'espère que la vie me remettra sur votre chemin (attention, je n'ai pas dit en travers, on reste copain hein ?).

Mon cher François (l'être humain avec qui j'ai passé plus de 75%... 90 % de mon temps éveillé !), mon cher Anthony (l'être humain avec qui il est difficile de rester longtemps complètement... maître de ses moyens), mes très chers compadres, camarades de labeurs, co-légionnaires et amis de la première heure. Qu'auraient été ces trois ans et demi de vie sans vous ? Ces années auront développé entre nous le lien sacré de la confrérie du China Jump (vous savez le bar... mais si enfin...), montrons nous en dignes !

Remerciements

Le nombre de moments exceptionnels que j'ai passés avec vous resteront gravés dans ma mémoire (sauf si j'en oublie un ou deux), vous compterez à jamais parmi mes amis (bande de veinards !). Je n'oublie évidemment pas Chin (Franco-swedo-singapourienne de talent, skieuse émérite !), Yaël, Rami, Philippe, pensionnaires longue durée de SONDRA ainsi que nos deux petits nouveaux, Karim et Frédéric (alias padawan... attention gamin, c'est pas parce que je suis plus là que je ne t'ai plus à l'oeil !). Je vous souhaite à tous une bonne continuation et un franc succès dans vos recherches et vos futurs carrières ! Mon cher Régis (t'as eu peur que je t'oublie, avoue ?), merci pour cette petite boisson des îles au goût orangé, dégustée au clair de lune. N'hésite pas à me prévenir pour le nouvel arrivage ! Anne-Hélène, je ne t'oublie pas non plus, ton attention quasi maternelle sur tes turbulents et bien discrets chercheurs te vaut toute mon admiration et je te souhaite beaucoup de courage (tu seras d'accord sur le fait qu'il t'en faudra !).

Mes très chers camarades de confs, êtres itinérants habitant à moins de 20 km de chez moi mais toujours croisés à au moins 2000 km... que de sciences échangées, que de sciences... ! Fred, Alex, Pascal, Jean Phi... J'espère vous revoir quelque part, dans l'un des quatre coins du globe et siroter avec vous un "lava flow" allongé sur un transat... ou bien quelque part près de Gif-sur-Yvette... je ne suis pas très regardant !

Table des matières

Introduction	1
1 Radars à synthèse d'ouverture et processeurs d'image	5
1.1 Modélisation des données SAR	6
1.1.1 Modélisation de l'ouverture synthétique	6
1.1.2 Les modes d'acquisitions des données SAR	6
1.1.3 Modélisation géométrique du système	8
1.2 Algorithmes SAR classiques de formation d'image	11
1.2.1 Algorithme de Corrélation Spatio-Temporel (CST) ou Time Domain Correlation Algorithm (TDCA)	11
1.2.2 Algorithme de Backprojection.	12
1.2.3 Algorithme de Migration Radial (AMR) ou Range Migration Algorithm (RMA).	13
1.2.4 Résolution d'une image SAR.	15
1.3 Algorithme de formation d'image SAR classique dérivé de la théorie de la détection	16
1.3.1 Formulation du problème de détection	16
1.3.2 Processeur SAR Classique (SARC) basé sur des détecteurs de signaux dans un bruit de variance connue.	16
1.3.2.1 Détecteurs de signaux dans un bruit de variance connue	16
1.3.2.2 Implémentation du processeur SAR	17
1.3.3 Processeur SAR Classique (SARC) basé sur des détecteurs de signaux dans un bruit de variance inconnue	17
1.3.3.1 Détecteurs SAR de signaux dans un bruit de variance inconnue	17
1.3.3.2 Implémentation du processeur SAR	18
1.4 Application des processeurs SAR à un cas simple	19
1.5 Conclusion	20
2 Détecteurs de sous espaces	25
2.1 Détecteurs de Sous Espaces Signaux (SES)	26
2.1.1 Formulation du problème de détection	26

Table des matières

2.1.2	Détecteurs de sous espaces signaux dans un bruit de variance connue	27
2.1.2.1	Détermination des détecteurs	27
2.1.2.2	Performances de détection	28
2.1.3	Détecteurs de sous espaces signaux dans un bruit de variance inconnue	28
2.1.3.1	Détermination du détecteur	28
2.1.3.2	Performances de détection	29
2.2	Détecteurs de Sous Espaces Signaux ou Interférences (SESI)	31
2.2.1	Problème de détection	31
2.2.2	Détecteurs de sous espaces signaux ou interférences dans un bruit de variance connue	32
2.2.2.1	Détermination des détecteurs	32
2.2.2.2	Performances de détection	33
2.2.3	Détecteurs de sous espaces signaux ou interférences dans un bruit de variance inconnue	34
2.2.3.1	Détermination du détecteur	35
2.2.3.2	Performances de détection	35
2.3	Conclusion	38
3	Processeurs SAR basés sur des détecteurs de sous espace	39
3.1	Processeurs SAR non optimisés	40
3.1.1	Construction de la base des sous espaces	40
3.1.1.1	Hypothèses	40
3.1.1.2	Critère et formation de la base	40
3.1.1.3	Détermination du pas d'échantillonnage angulaire pour le calcul de la base des sous espaces	41
3.1.1.4	Synthèse	42
3.1.2	Implementation des processeurs d'image	42
3.1.2.1	Processeur SAR basé sur des détecteurs de Sous Espace Signaux (SARSES)	42
3.1.2.2	Processeur SAR basé sur des détecteurs de Sous espace signaux et interférences	42
3.2	Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux bruts	46
3.2.1	Notations	46
3.2.2	Optimisation des calculs de la base des sous espaces	47
3.2.2.1	Suppression des zéros	47
3.2.2.2	Calcul d'une seule décomposition en valeurs singulières	48
3.2.3	Implementation des processeurs d'image optimisés opérant sur signaux bruts	50
3.3	Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux compressés	54

3.3.1	Notations et hypothèses	54
3.3.2	Reformulation du calcul de la base des sous espaces	55
3.3.3	Calcul des quantités tests des détecteurs SAR à partir du signal compressé	56
3.3.4	Implémentation des processeurs opérant sur signaux compressés	59
3.4	Résolution des images obtenues	62
3.4.1	Processeurs basés sur des détecteurs SAR de sous espaces signaux	62
3.4.1.1	Fonction d'ambiguïté, version variance du bruit connue	62
3.4.1.2	Fonction d'ambiguïté, version variance du bruit inconnue	62
3.4.2	Processeurs basés sur des détecteurs SAR de sous espaces signaux ou interfé- rences	63
3.4.2.1	Fonction d'ambiguïté, version variance du bruit connue	63
3.4.2.2	Fonction d'ambiguïté, version variance du bruit inconnue	63
3.5	Conclusion	64
4	Application à la détection de cibles manufacturées en bande P	65
4.1	Performances de l'algorithme SARSES en bande P	66
4.1.1	Hypothèses sur la réponse des cibles manufacturées en bande P	66
4.1.2	Validation des critères de fonctionnement	66
4.1.2.1	Paramètres de simulation	67
4.1.2.2	Validation du critère "sous espace de faible dimension"	67
4.1.2.3	Choix d'un pas d'échantillonnage angulaire	67
4.1.2.4	Validation du critère "une seule SVD à calculer"	69
4.1.3	Propriété de l'image formée	71
4.1.3.1	Résolution des images	71
4.1.3.2	Nature des points brillants	71
4.1.4	Détection de cibles manufacturées dans du bruit blanc Gaussien	75
4.1.4.1	Détection d'une plaque métallique	75
4.1.4.2	Détection d'un pavé métallique	78
4.1.5	Détection de cibles manufacturées dans une forêt	80
4.1.5.1	Données simulées	80
4.1.5.2	Données réelles	83
4.2	Performances de l'algorithme SARSESI en bande P	87
4.2.1	Hypothèses sur la réponse de la forêt en bande P	87
4.2.2	Validation des critères de fonctionnement	87
4.2.2.1	Paramètres	87
4.2.2.2	Sous espace de petite dimension	87
4.2.2.3	Pas d'échantillonnage angulaire	88

Table des matières

4.2.3	Détection de cibles manufacturées sous couvert forestier	89
4.2.3.1	Données simulées	89
4.2.3.2	Données réelles	92
Conclusion et perspectives		99
1	Conclusion	99
2	Perspectives	101
2.1	Evolutions de l'algorithme	101
2.2	Autres applications possibles	102
Annexe A Calcul de distributions en χ^2		103
A.1	Calcul de la distribution de la différence de deux χ^2	103
A.2	Calcul d'une probabilité d'un rapport de différence de χ^2	104
Annexe B		
Modélisation des signaux SAR		
B.1	Modélisation de la diffusion d'un signal monochromatique	107
B.2	Modélisation de la diffusion d'un signal large bande	108
B.3	Décalage en bande de base	109
B.4	Analyse numérique	109
Annexe C		
Démonstration de l'orthonormalité du produit de deux matrices		
C.1	Variables, hypothèses et propriétés	111
C.2	Démonstration	112
C.2.1	Orthogonalité	112
C.2.2	Orthonormalité	113
Annexe D		
Démonstration de l'équivalence entre un produit de vecteur et une convolution cyclique		
D.1	Variables, hypothèses et propriétés	115
D.2	Démonstration	116
Publications		
Bibliographie		119

Acronymes

Organismes

SONDRA : Supélec ONERA NUS DSTA Research Alliance.
ONERA : Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques.
NUS : National University of Singapore.
DSTA : Defence and Science Technology Agency.
GEA : Groupe d'Electromagnétisme Appliqué.

Acronymes généraux

RSO / SAR : Radar à Synthèse d'Ouverture / Synthetic Aperture Radar.
SARC / CSAR : SAR Classique / Classical SAR.
DSE / MSD : Détecteur de Sous Espace / Matched Subspace Detector.
SARSES / SSDSAR : SAR à Sous Espace Signal / Subspace Signal Detector SAR.
SARSESI / SISDSAR : SAR à Sous Espace Signal ou Interférence / Signal or Interference Subspace Detector SAR.
RVG : Rapport de Vraisemblance Généralisé.
TRVG : Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé.
TFAC / CFAR : Taux de Fausse Alarme Constant / Constant False Alarm Rate.
RSB / SNR : Rapport Signal à Bruit / Signal to Noise Ratio.
SVD : Singular Value Decomposition.

Acronymes

Symboles

Les caractères gras désignent des vecteurs ou des matrices.

$v(n)$	n^{ieme} élément du vecteur \mathbf{v} .
$\langle E \rangle$	Sous espace vectoriel de dimensions D_E .
$\langle E \rangle^\perp$	Sous espace vectoriel orthogonal au sous espace $\langle E \rangle$.
\mathbf{I}_N	Matrice identité $N \times N$.
\mathbf{M}^*	Conjugué de la matrice \mathbf{M} .
\mathbf{M}^T	Transposé de la matrice \mathbf{M} .
\mathbf{M}^\dagger	Transposé conjugué de la matrice \mathbf{M} .
$\text{tr}(\mathbf{M})$	Trace de la matrice \mathbf{M} .
$\ \mathbf{M}\ _F$	Norme de Frobenius de la matrice \mathbf{M} .
$\mathbf{0}_N$	Vecteur colonne nul à N éléments.
$\text{diag}(\mathbf{v})$	Matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les éléments du vecteur \mathbf{v} .
$\ \mathbf{v}\ $	Norme du vecteur \mathbf{v} .
$\downarrow^k(\mathbf{v})$	Décale k fois les éléments de v vers le bas en ajoutant k 0 sur les premiers éléments du vecteur \mathbf{v} et en supprimant les k derniers éléments du vecteurs \mathbf{v} .
$\underline{\mathbf{v}}$	Vecteur de N éléments tel que pour tout $n \in [0, N - 1]$, les éléments de $\underline{\mathbf{v}}$ s'écrivent en fonction des éléments du vecteur \mathbf{v} de la façon suivante : $\underline{v}(n) = v(-n \bmod N)$. On a de plus : $\text{TFD}(\underline{\mathbf{v}}^*) = \text{TFD}^*(\mathbf{v})$.
$\text{TF}_{t \rightarrow f}(g(t))$	Transformée de Fourier par rapport à la variable t de la fonction g . f est la variable d'arrivée.
$\text{TFD}(\mathbf{v})$	Transformée de Fourier Discrète du vecteur \mathbf{v} .
$\text{TFD}^{-1}(\mathbf{v})$	Transformée de Fourier Discrète inverse du vecteur \mathbf{v} .
$y(t) * h(t)$	Produit de convolution entre $y(t)$ et $h(t)$. $y(t) * h(t) = \int_x y(x) h(t - x) dx$
$\mathbf{y} * \mathbf{h}$	Produit de convolution numérique des vecteurs \mathbf{y} et \mathbf{h} de N et M échantillons. Si on pose $\mathbf{z} = \mathbf{y} * \mathbf{h}$, avec \mathbf{z} un vecteur de $N + M - 1$ éléments, alors pour tout $n \in [0, N + M - 2]$, $z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k) h(n - k)$.
$\mathbf{y} \odot \mathbf{h}$	Produit de convolution cyclique entre les vecteurs \mathbf{y} et \mathbf{h} de N éléments chacun. Si on pose $\mathbf{z} = \mathbf{y} \odot \mathbf{h}$ le vecteur de N éléments tel que pour tout $n \in [0, N - 1]$: $z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k) h(n - k \bmod N)$. On a de plus : $\mathbf{y} \odot \mathbf{h} = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}(\mathbf{y}) \text{TFD}(\mathbf{h}))$.

$n \bmod N$	n modulo N.
$\lceil x \rceil$	Partie entière supérieure de x .
$E[X]$	Espérance de la variable aléatoire X .
$X \sim p(x)$	La variable aléatoire X a une distribution de densité de probabilité $p(x)$.
$CN(\mathbf{m}, \mathbf{R})$	Distribution complexe normale circulaire de moyenne \mathbf{m} et de matrice de covariance \mathbf{R} .
$\chi^2(d, \nu)$	Distribution du χ^2 à d degrés de liberté, de paramètre de décentrement ν . Si $\nu = 0$, la distribution est centrée.
$F(d_1, d_2, \nu_1, \nu_2)$	F-distribution doublement décentrée de degrés de liberté d_1 et d_2 et de paramètres de décentrement ν_1 et ν_2 . Si $\nu_2 = 0$, la distribution est simplement décentrée. Si $\nu_1 = \nu_2 = 0$, la distribution est centrée.

Symboles

Table des figures

1.1	<i>Modélisation de l'ouverture synthétique.</i>	6
1.2	<i>Configuration en mode stripmap.</i>	7
1.3	<i>Configuration en mode spotlight.</i>	7
1.4	<i>Configuration SAR 2D.</i>	10
1.5	<i>Configuration SAR 3D.</i>	10
1.6	<i>Schéma de l'algorithme TDCA.</i>	11
1.7	<i>Schéma de l'algorithme de Backprojection.</i>	13
1.8	<i>Schéma de l'algorithme RMA.</i>	15
1.9	<i>Schéma du l'algorithme SARC.</i>	18
1.10	<i>Signal émis en bande de base : le chirp rampe ascendante (à gauche, partie réelle, à droite, partie imaginaire).</i>	21
1.11	<i>Spectre du signal émis en bande de base.</i>	21
1.12	<i>Signal brut reçu en bande de base en fonction du temps d'observation pour toutes les positions de l'antenne (à gauche, partie réelle, à droite, partie imaginaire).</i>	22
1.13	<i>Signal compressé reçu en bande de base en fonction du temps d'observation pour toutes les positions de l'antenne (à gauche, partie réelle, à droite, partie imaginaire).</i>	22
1.14	<i>Image formée par un algorithme Backprojection (à gauche) et RMA (à droite).</i>	23
1.15	<i>Image formée par un algorithme SARC variance du bruit connue (à gauche) et variance du bruit inconnue (à droite).</i>	23
2.1	<i>Rotations α et β dans le cas d'une plaque.</i>	26
2.2	<i>Rotations α et β dans le cas où le modèle de cible est une plaque.</i>	32
2.3	<i>Rotations γ et δ dans le cas où le modèle d'interférence est un cylindre.</i>	32
3.1	<i>Schéma de l'algorithme SARSES</i>	44
3.2	<i>Schéma de l'algorithme SARSESI</i>	45
3.3	<i>Angles d'incidence θ_i et ϕ_i.</i>	46
3.4	<i>Schéma de l'algorithme SARSES optimisé, travail sur signaux bruts</i>	52
3.5	<i>Schéma de l'algorithme SARSESI optimisé, travail sur signaux bruts</i>	53
3.6	<i>Schéma de l'algorithme SARSES optimisé, travail sur signaux compressés.</i>	60
3.7	<i>Schéma de l'algorithme SARSESI optimisé, travail sur signaux compressés.</i>	61
4.1	<i>Diagramme de diffusion normalisé en fonction de l'incidence pour deux plaques de 1×2 m, d'orientations différentes, à 400 MHz.</i>	66
4.2	<i>Valeurs singulières normalisées pour différentes tailles de plaques.</i>	68
4.3	<i>Erreurs $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ et $\epsilon(\Delta_s)$ en fonctions de Δ_s, pour $D = 10$.</i>	69
4.4	<i>ϵ_i et η_i entre (x_0, y_0) et (x_{min}, y_{min}) en fonction des positions u_i.</i>	70
4.5	<i>ϵ_i et η_i entre (x_0, y_0) et (x_{max}, y_{max}) en fonction des positions u_i.</i>	70

Table des figures

4.6	Fonction d'ambiguïté en distance (a.) et en azimuth (b.) de l'algorithme SARSES "variance connue".	72
4.7	Fonction d'ambiguïté en distance (a.) et en azimuth (b.) de l'algorithme SARSES "variance inconnue".	72
4.8	Plaque de 2×3 m, orientée suivant $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/8)$: a. Image SARC, b. image SARSES rang 2 variance connue, c. image SARSES rang 2 variance inconnue, d. image SARSES rang 6 variance connue, e. image SARSES rang 6 variance inconnue, f. image SARSES rang 10 variance connue, g. image SARSES rang 10 variance inconnue.	73
4.9	Plaque de 2×3 m, orientée suivant $(\alpha, \beta) = (0, 0)$: a. Image SARC, b. image SARSES rang 2 variance connue, c. image SARSES rang 2 variance inconnue, d. image SARSES rang 6 variance connue, e. image SARSES rang 6 variance inconnue, f. image SARSES rang 10 variance connue, g. image SARSES rang 10 variance inconnue.	74
4.10	PD en fonction du SNR d'une plaque de 1×2 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).	76
4.11	PD en fonction du SNR d'une plaque de 1×2 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/6)$ pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).	76
4.12	PD en fonction du SNR d'une plaque de 2×3 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).	77
4.13	PD en fonction du SNR d'une plaque de 2×3 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/6)$ pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).	77
4.14	Configuration de la scène.	78
4.15	PD en fonction du SNR du pavé pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).	79
4.16	PD en fonction du SNR du pavé ayant subi une rotation de $\pi/8$ autour de l'axe vertical pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).	79
4.17	Configuration de la scène.	80
4.18	Boîte métallique dans la forêt : a. Image SARC, b. image SARSES rang 2 variance connue, c. image SARSES rang 2 variance inconnue, d. image SARSES rang 6 variance connue, e. image SARSES rang 6 variance inconnue, f. image SARSES rang 10 variance connue, g. image SARSES rang 10 variance inconnue.	81
4.19	Boîte métallique dans la forêt ayant subi une rotation de $\pi/8$ autour de l'axe vertical : a. Image SARC, b. image SARSES rang 2 variance connue, c. image SARSES rang 2 variance inconnue, d. image SARSES rang 6 variance connue, e. image SARSES rang 6 variance inconnue, f. image SARSES rang 10 variance connue, g. image SARSES rang 10 variance inconnue.	82
4.20	Configuration de la scène.	83
4.21	Image RMA de la scene.	84
4.22	Camion et trièdre sans la forêt de Nezer, a. : Image formée par un RMA, b. : image formée par un algorithme SAR SES dimension 2, c. : image formée par un algorithme SAR SES dimension 6, d. : image formée par un algorithme SAR SES dimension 10.	86
4.23	Valeurs singulières normalisées pour différentes tailles de cylindres.	88
4.24	Erreurs $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ et $\epsilon(\Delta_s)$ en fonctions de Δ_s , pour $D = 10$	89
4.25	Pavé métallique dans la forêt ayant subi une rotation de $\pi/9$ autour de l'axe vertical : a. Image SARC, b. image SARSES dimension 10 variance inconnue, c. image SARSES dimension sous espace signal : 10, interférence : 10, variance inconnue.	90
4.26	Nombre de fausses alarmes en fonction du seuil pour un pavé tourné de $\pi/9$ dans une forêt de troncs.	90

4.27 Pavé métallique dans la forêt ayant subi une rotation de $\pi/8$ autour de l'axe vertical :	
a. Image SARC, b. image SARSES dimension 10 variance inconnue, c.image SARSESI	
dimension sous espace signal : 10, interférence : 10, variance inconnue.	91
4.28 Nombre de fausses alarmes en fonction du seuil pour une pavé tourné de $\pi/8$ dans une	
forêt de troncs.	91
4.29 Déploiement des cibles dans la scène.	92
4.30 Image obtenue avec un RMA.	94
4.31 Image obtenue avec un algorithme SARSES.	95
4.32 Image obtenue avec un algorithme SARSESI.	96
4.33 Nombre de cibles détectées en fonction du nombre de fausses alarmes pour les algo-	
rithmes RMA (-), SARSES (*) et SARSESI (\triangle), a. vol 1, b. vol 2, c. vol 3.	97

Table des figures

Liste des tableaux

3.1	<i>Impact des optimisations sur les temps de calcul des SVD.</i>	51
-----	--	----

Liste des tableaux

Introduction

La résolution transverse (c'est à dire la capacité à faire la distinction entre deux diffuseurs proches) obtenue par un radar classique est directement proportionnelle à l'ouverture effective de l'antenne qu'il utilise, elle même dépendante de la taille de l'antenne. Un Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO) ou Synthetic Aperture Radar (SAR) en anglais est un radar aéroporté (avion, satellite...) permettant de créer, à partir d'une série de mesures faites le long d'une trajectoire (linéaire, circulaire...), une ouverture d'antenne synthétique de grande dimension. L'intérêt du SAR est donc de générer une ouverture synthétique bien plus grande que l'ouverture réelle de l'antenne du radar et donc d'améliorer la résolution transverse. A chaque position de mesure, le radar illumine une zone du sol à l'aide d'une onde électromagnétique sur une certaine plage angulaire. L'onde est partiellement rétrodiffusée par l'ensemble des diffuseurs éclairés et captée par le radar. Le principe de l'imagerie SAR est de synthétiser à l'aide d'un algorithme spécialisé, appelé processeur SAR, l'ensemble des signaux récupérés à chaque position du radar afin de former une image de la scène.

La détection de cibles manufacturées en présence de bruit, clutter, fouillis ou interférences avec un système SAR est un sujet de recherche actif soulevant de nombreuses difficultés. Il est bien connu qu'un simple algorithme de formation d'image conduit bien souvent à l'apparition de nombreuses fausses alarmes qui gênent la détection. Les images SAR sont formées avec des algorithmes basés sur le modèle du point isotrope. Ceci suppose que chaque cible peut être vue comme un ensemble de points isotropes. Cette hypothèse est pertinente si les diffuseurs présents sur la scène à imager peuvent être considérés comme des ensembles de particules de grande taille (supérieure à la longueur d'onde), aléatoirement orientées, appelés volumes aléatoires [1]. Ces volumes aléatoires se comportent, en terme de diffusion, comme une sphère de grande dimension. Cependant, une cible manufacturée est décrite avec plus de justesse comme un ensemble d'éléments ayant des propriétés de diffusion spécifiques (directivité et la réponse en fréquence). Le modèle du point isotrope se révèle donc dans ce cas inadapté. Un processeur SAR utilisant un modèle décrivant mieux le comportement électromagnétique de la cible à détecter améliorerait certainement la réponse de celle-ci.

Des traitements appliqués au SAR exploitant les mécanismes de diffusion des cibles ou de propagation existent : la polarimétrie, par exemple, permet de différencier les mécanismes (simple rebond, double rebond...) de rétrodiffusion d'une cible et l'interférométrie qui permet d'exploiter les informations sur sa hauteur, voir [2]. Ces traitements ne considèrent cependant pas plus avant les propriétés de rétrodiffusion intrinsèques de la cible. L'analyse en ondelettes permet de prendre en compte l'anisotropie des cibles à détecter (voir [4]), mais souffre de quelques limites pour l'application à la détection : elle ne permet qu'une analyse monochromatique, c'est à dire qu'elle ne considère qu'une fréquence donnée et pas toute la bande du spectre du signal émis. La couverture de l'ensemble des réponses possibles d'une cible, quelque soit son orientation, nécessite une base d'ondelette de grande dimension (augmentant le risque de détecter du bruit). L'analyse complète d'une image SAR par ce moyen se fait donc sur un nombre très important d' "hyper images", parfois compliquées à interpréter. Une approche différente peut être

envisagée en considérant qu'une cible manufacturée peut être vue comme un ensemble d'éléments canoniques (par exemple un ensemble de plaques). Le modèle utilisé lors de la détection ne sera donc plus le point isotrope mais un élément canonique choisi. Afin de développer ce détecteur, une première idée pourrait être d'implémenter un banc de filtres adaptés à toutes les configurations possibles du modèle choisi. Cette approche est suivie dans [6], où les cibles à détecter (véhicules) sont modélisées comme des ensembles de dièdres. Un banc de filtres adaptés à chaque orientation et chaque taille de dièdre est présenté. Le traitement résultant est un post traitement appliqué à l'image SAR. Ce genre d'approche souffre de plusieurs inconvénients : la robustesse concernant les configurations non prévues dans le banc de filtres n'est pas garantie car seule la meilleure configuration (taille et orientation) est retenue et surtout, la charge de calcul imposée par un telle méthode rend toute application de l'algorithme à des données réelles pratiquement impossible. Dans [7], une approche similaire est suivie basée sur les Détecteurs de Sous Espaces (DSE) ou Matched Subspace Detectors (MSD). Après la formation d'image SAR, un MSD est appliqué sur les pixels d'intérêt de l'image formée. Le sous espace considéré est le sous espace d'une cible généré comme dans [6] par un ensemble de réponses d'un groupe de dièdres. Tout comme dans [6], on peut aussi constater plusieurs défauts : la dimension du sous espace considéré est tellement importante qu'elle augmente non seulement la réponse de la cible, mais aussi la réponse du bruit et seuls quelques pixels de l'image sont considérés à cause de la charge de calcul énorme nécessitée par l'algorithme, ce qui le rend lui aussi inutilisable en pratique.

Pour obtenir un algorithme performant utilisant les MSD, il faudrait donc réduire la dimension des sous espaces considérés, le rendre robuste aux différentes configurations du modèle, même celles non décrites à priori, et résoudre le problème du temps de calcul. Cette thèse propose au long de quatre chapitres de nouveaux algorithmes SAR de formation d'images répondant à ces exigences.

Le chapitre 1 présente différents types de configurations SAR existantes ainsi que la modélisation que nous retenons. Trois processeurs SAR "classiques" sont présentés, tous basés sur le modèle du point isotrope. Nous montrons que ces algorithmes sont assimilables à des détecteurs de points isotropes en développant notre propre processeur SAR s'appuyant sur la théorie de la détection.

Dans le chapitre 2, nous introduisons deux détecteurs de sous espaces susceptible d'être intégrés dans un processeur SAR. Le premier fait l'hypothèse que la cible est plongée dans un bruit blanc Gaussien, le second s'applique à une cible positionnée dans un environnement dont la réponse interfère avec celle de la cible. Nous nous proposons de partir d'un modèle que l'on aura choisi pour décrire la cible que l'on veut détecter. On considérera, dans un premier temps, qu'à une position donnée sur la scène à imager, le signal reçu est constitué soit du signal réfléchi par le modèle de cible que l'on aura choisi orienté dans une direction inconnue, plus du bruit blanc Gaussien, soit seulement de bruit blanc. Cette approche a pour but d'augmenter la probabilité de détection de la cible, tout en conservant un taux de fausse alarme au même niveau que celui généré par un détecteur de point isotrope classique. Pour résoudre ce problème de détection, nous dérivons un Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (TRVG) [8] qui aboutit à un détecteur de Sous Espace Signal (SES) ou Matched Signal Subspace Detector [9], [10]. On s'attend à ce que les effets du bruit ne soient pas trop accru du fait de la faible dimension du sous espace généré par le modèle choisi. On considérera dans un second temps que la cible que l'on veut détecter est placée dans un environnement d'interférences générées par une certaine catégorie de diffuseurs (par exemple dans une forêt, les troncs d'arbre sont une source importante de fausses alarmes). On a adapté le problème de détection précédent à cette nouvelle configuration. Le TRGV aboutit à un nouveau type de détecteur de sous espace que l'on appellera détecteur de Sous Espace Signal ou Interférence (SESI).

Dans le chapitre 3, nous utilisons les détecteurs SES et SESI afin de développer de nouveaux processeurs SAR (que l'on appelle respectivement algorithme SARSES et algorithme SARSESI) et de résoudre

les différents problèmes soulevés par les méthodes précédemment décrites. Cette approche opère donc directement sur les signaux SAR reçus et pas sur l'image déjà formée. En partant d'un modèle de cible (et d'interférence dans le cas de l'algorithme SARSESI), on génère un sous espace à partir de l'ensemble des réponses de ce modèle quelque soit son orientation. L'algorithme SARSES a pour but d'augmenter la probabilité de détection et de garder une probabilité de fausse alarme environ au même niveau que les processeurs SAR classiques grâce à la faible dimension du sous espace cible considéré. Le sous espace engendré devra forcément être de petite dimension pour ne pas englober plus de bruit que de signal. L'algorithme SARSESI permet également d'augmenter la probabilité de détection mais aussi de réduire la probabilité de fausse alarme en considérant des sous espaces "interférence". Ces algorithmes, malgré la faible dimension du sous espace utilisé et leur robustesse, entraînent une charge de calcul très importante liée à la formation des sous espaces. Une partie importante de ce chapitre sera ainsi vouée à la résolution de ce problème, contribution majeure de ce travail de thèse.

Le chapitre 4 applique les deux nouveaux algorithmes au cas de la détection de cibles manufacturées en bande P. On s'intéressera plus particulièrement à la configuration FOPEN (pour FOliage PENetration) où une (ou des) cible(s) de type camion est stationnée dans une forêt. Le camion pouvant être représenté par un ensemble de plaques métalliques diversement orientées, nous adaptons l'algorithme SARSES à ce choix. Dans le cas de la détection dans la forêt, nous choisirons de décrire les troncs d'arbres, principale source de fausses alarmes en bande P, par des cylindres diélectriques. En appliquant l'algorithme SARSESI, nous considérons donc que les interférences sont causées par des cylindres inclinés, d'inclinaison inconnue. Ce chapitre montre la démarche à suivre pour utiliser correctement les algorithmes, notamment la validation des critères à respecter et la résolution de l'image attendue. Le principal intérêt de cette partie reste cependant les résultats obtenus en terme de gain de performance de détection, que ce soit sur données simulées, ou sur données réelles.

Introduction

Chapitre 1

Radars à synthèse d'ouverture et processeurs d'image

Ce chapitre se place dans le contexte de la formation classique d'image par synthèse de données SAR. Après avoir décrit avec précision dans une première section la modélisation des données SAR que nous retenons, nous présentons dans une deuxième section trois des principaux algorithmes SAR ou processeurs SAR, chacun d'eux générant une image équivalente. Sachant qu'une cible est considérée par un processeur SAR classique comme un ensemble de points isotropes, nous montrons finalement qu'il est possible de considérer les processeurs SAR comme des détecteurs de points isotropes en développant un processeur SAR issu de la théorie de la détection. On appelle ce type d'algorithme processeur SAR Classique (SARC).

1.1 Modélisation des données SAR

Avant d'étudier les différents algorithmes de formation d'images SAR, il est important de bien comprendre comment sont modélisés les signaux acquis et utilisés par un système SAR et quelles hypothèses sont retenues.

1.1.1 Modélisation de l'ouverture synthétique

On considère un radar aéroporté se déplaçant le long d'un axe (u) (axe transverse ou azimutal). Il émet un signal $e(t)$ de fréquence centrale f_0 et de largeur de bande B pendant un temps T_e à toutes les positions u_k , $k \in [1, n]$, sur l'axe (u). Chaque position u_k est séparée d'une distance δ_u de la précédente. Nous nous plaçons dans une configuration monostatique, c'est à dire que l'émetteur et le récepteur sont localisés au même endroit. Après l'émission du signal $e(t)$, le radar reçoit un signal $z_k(t)$ associé à la position u_k de l'antenne pendant une durée T_r . Ce signal correspond à l'onde rétrodiffusée par l'ensemble des diffuseurs éclairés. Nous faisons l'hypothèse du "stop and go", c'est à dire que l'antenne est immobile entre l'émission du signal $e(t)$ et la réception totale du signal $z_k(t)$. On ne s'intéresse pas non plus aux problèmes liés à la correction de trajectoire, la trajectoire observée par l'antenne est supposée parfaite (ou parfaitement connue). La configuration retenue est résumée par la Figure 1.1

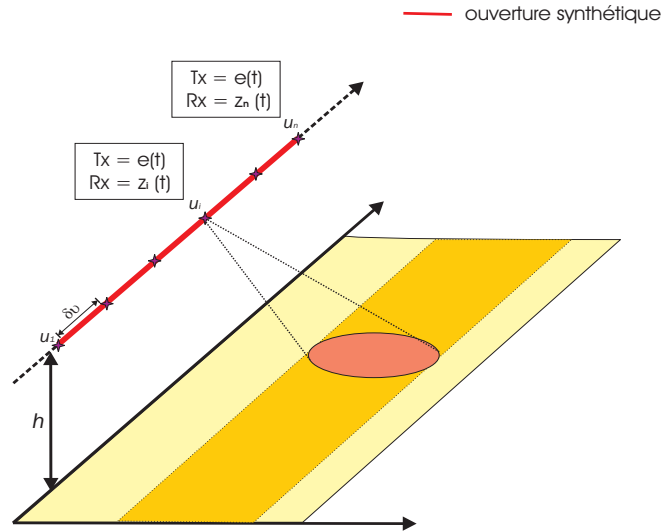


FIG. 1.1 – Modélisation de l'ouverture synthétique.

1.1.2 Les modes d'acquisitions des données SAR

Il existe deux modes d'acquisition des données SAR :

- **Le mode stripmap** : l'antenne du radar conserve la même direction de pointage tout au long de l'acquisition des données. L'ouverture de l'antenne utilisée est très large, le but étant d'observer une même portion de scène de différents points d'acquisitions. C'est un mode très utilisé à

l'ONERA et c'est celui que nous retiendrons (voir Figure 1.2).

- **Le mode spotlight** : l'antenne balaye la zone avec des directions de pointage différentes en fonction de la position d'acquisition. L'ouverture d'antenne utilisée est plus fine que celle nécessaire en mode stripmap. Il a l'avantage d'améliorer la résolution de l'image, du fait de la plus grande couverture angulaire de la scène éclairée (voir Figure 1.3).

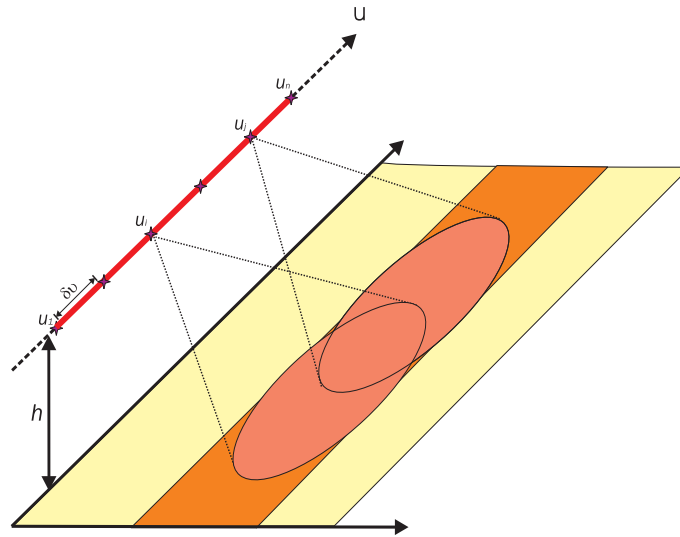


FIG. 1.2 – Configuration en mode stripmap.

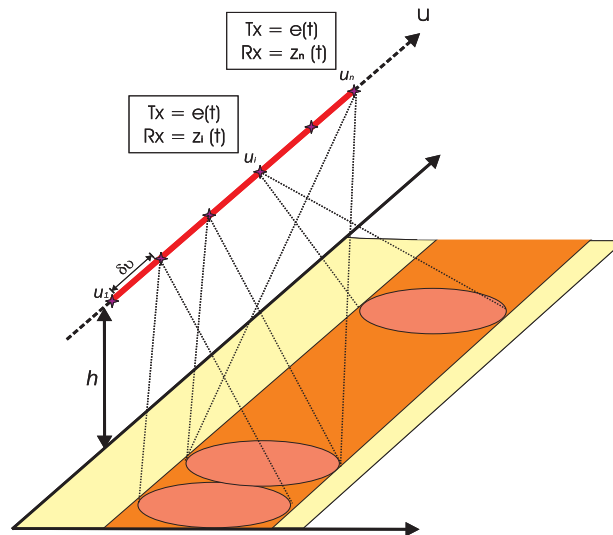


FIG. 1.3 – Configuration en mode spotlight.

1.1.3 Modélisation géométrique du système

En SAR classique on peut considérer deux types de configuration relatives à la géométrie du système :

- **Configuration 2D** : C'est une géométrie simplifiée. On considère que le radar et les diffuseurs ont une hauteur nulle. Tout se passe donc dans le plan $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ (voir Figure 1.4). Soit $y_k(t)$ le signal rétrodiffusé par un diffuseur placé en (x, y) . On note $\sigma(x, y)$ le coefficient de rétrodiffusion qui caractérise la part du signal émis qui a été diffusée en direction du radar par l'élément considéré. Ce coefficient de rétrodiffusion dépend à la fois des propriétés du diffuseur (dimension, forme, permittivité) et de la configuration du radar (angle d'incidence et de diffusion, fréquence, polarisation,...). Classiquement en SAR, on considère que $\sigma(x, y)$ ne varie pas en fonction des angles d'incidences, c'est à dire que la réponse de l'élément est isotrope. Cette hypothèse est valable si les diffuseurs aux sols peuvent être envisagés comme des volumes aléatoires (voir introduction). Le coefficient de rétrodiffusion $\sigma(x, y)$ est donc considéré constant quelque soit la position (O, u_k) du radar. $y_k(t)$ s'écrit :

$$y_k(t) = \sigma(x, y) e(t - \tau_k(x, y)) \quad (1.1)$$

$$= \sigma(x, y) \left(e(t) * \delta(t - \tau_k(x, y)) \right) \quad (1.2)$$

avec $\tau_k(x, y)$ le temps mis par le signal pour faire l'aller et retour entre l'antenne (en $(0, u_k)$) et le diffuseur (en (x, y)) à la célérité c de la lumière :

$$\tau_k(x, y) = \frac{2\sqrt{x^2 + (y - u_k)^2}}{c} \quad (1.3)$$

Si on considère $\hat{y}_k(t)$ et $\hat{e}(t)$, les signaux $y_k(t)$ et $e(t)$ ramenés en bande de base, on a :

$$\hat{y}_k(t) = \sigma(x, y) \left(\hat{e}(t) * \delta(t - \tau_k(x, y)) \right) \exp(-2j\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.4)$$

A partir de maintenant, on considère seulement les signaux transposés en bande de base, et on pose :

$$e(t) = \hat{e}(t) \quad (1.5)$$

$$y_k(t) = \hat{y}_k(t) \quad (1.6)$$

Le signal $z_k(t)$ contient l'ensemble des réponses diffusées par R diffuseurs de coordonnées (x_r, y_r) , de coefficient de diffusion $\sigma_r(x_r, y_r)$ et est défini comme suit :

$$z_k(t) = \sum_{r=1}^R \sigma_r(x_r, y_r) \left(e(t) * \delta(t - \tau_k(x_r, y_r)) \right) \exp(-2j\pi f_0 \tau_k(x_r, y_r)) \quad (1.7)$$

- **Configuration 3D** : On considère que le radar se déplace à une hauteur h . A chaque position, le radar a donc comme coordonnées $(0, u_k, h)$ dans le repère $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (voir Figure 1.5). Le signal rétrodiffusé par un diffuseur placé en (x, y, z) de coefficient de diffusion $\sigma(x, y, z)$ constant quelque soit k et reçu par l'antenne en $(0, u_k, h)$ s'écrit :

$$y_k(t) = \sigma(x, y, z) e(t - \tau_k(x, y, z)) \quad (1.8)$$

$$= \sigma(x, y, z) \left(e(t) * \delta(t - \tau_k(x, y, z)) \right) \quad (1.9)$$

$\tau_k(x, y, z)$ est le temps mis par le signal pour faire l'aller retour entre l'antenne placée en $(0, u_k, h)$ et le diffuseur placé en (x, y, z) :

$$\tau_k(x, y, z) = \frac{2\sqrt{x^2 + (y - u_k)^2 + (h - z)^2}}{c}. \quad (1.10)$$

Comme précédemment, si on considère $\hat{y}_k(t)$ et $\hat{e}(t)$, les signaux $y_k(t)$ et $e(t)$ ramenés en bande de base, on a :

$$\hat{y}_k(t) = \sigma(x, y, z) \left(\hat{e}(t) * \delta(t - \tau_k(x, y, z)) \right) \exp(-2j\pi f_0 \tau_k(x, y, z)) \quad (1.11)$$

On ne garde que la version mise en bande de base des signaux $y_k(t)$ et $e(t)$ et on pose :

$$e(t) = \hat{e}(t) \quad (1.12)$$

$$y_k(t) = \hat{y}_k(t) \quad (1.13)$$

Si on considère maintenant qu'on a R diffuseurs de coordonnées (x_r, y_r, z_r) et de coefficient de diffusion $\sigma_r(x_r, y_r, z_r)$, $r \in [1, R]$, le signal $z_k(t)$ s'écrit :

$$z_k(t) = \sum_{r=1}^R \sigma_r(x_r, y_r, z_r) \left(e(t) * \delta(t - \tau_k(x_r, y_r, z_r)) \right) \exp(-2j\pi f_0 \tau_k(x_r, y_r, z_r)) \quad (1.14)$$

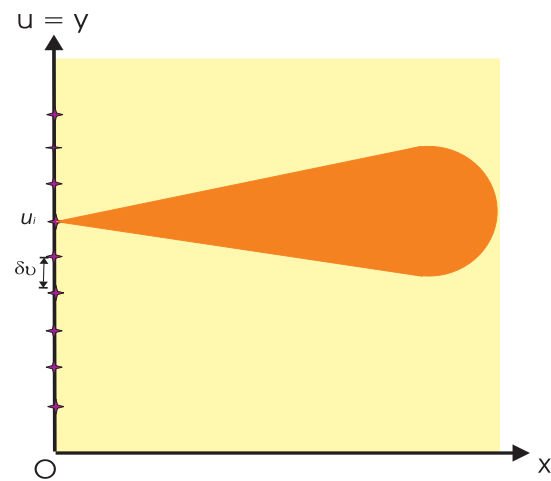


FIG. 1.4 – Configuration SAR 2D.

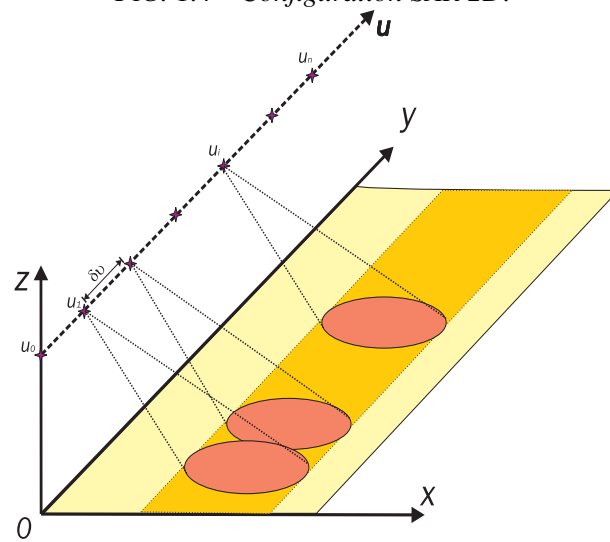


FIG. 1.5 – Configuration SAR 3D.

1.2 Algorithmes SAR classiques de formation d'image

Dans cette partie, trois algorithmes différents de formation d'image sont présentés. Ils diffèrent principalement sur deux points : l'Algorithme de Corrélation Spatio-Temporelle (ACST) ou Time Domain Correlation Algorithm (TDCA) et l'algorithme de Backprojection sont basés sur un traitement spatio-temporel des données, l'Algorithme de Migration Radiale (AMR) ou Range Migration Algorithm (RMA) est basé sur un traitement fréquentiel des données. La deuxième différence réside dans la rapidité des algorithmes : par ordre croissant, le TDCA, le Backprojection et le RMA. Nous montrerons que malgré la différence des approches utilisées par ces algorithmes, l'image obtenue est la même. Dans le souci de ne pas trop alourdir les notations, nous choisissons la configuration simplifiée 2D (les résultats obtenus sont aisément adaptables à la configuration 3D).

1.2.1 Algorithme de Corrélation Spatio-Temporel (CST) ou Time Domain Correlation Algorithm (TDCA)

L'algorithme de corrélation spatio temporelle est un processeur SAR basé sur la corrélation entre le signal reçu et le modèle de signal attendu défini dans l'équation (1.11), c'est à dire le signal émis retardé. On suppose que les coefficient de diffusion $\sigma(x, y)$ sont inconnus et déterministes. Le signal $m_k(t, x, y)$ utilisé comme modèle en bande de base s'écrit donc comme suit :

$$m_k(t, x, y) = e(t) * \delta(t - \tau_k(x, y)) \exp(-2j\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.15)$$

L'amplitude de chaque pixel de coordonnées (x, y) est donnée par [11] :

$$I_{TDCA}(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_t z_k(t) m_k^*(t, x, y) dt \quad (1.16)$$

Si on pose \mathbf{e} et \mathbf{z}_k :

$$\mathbf{e} = [e(0) \quad \dots \quad e(\lceil F_s T_e \rceil - 1) \quad \mathbf{0}_{\lceil F_s T_r \rceil - \lceil F_s T_e \rceil}]^T \quad (1.17)$$

et

$$\mathbf{z}_k = [z_k(0) \quad \dots \quad z_k(\lceil F_s T_r \rceil - 1)]^T \quad (1.18)$$

les vecteurs contenant les échantillons de $e(t)$ et $z_k(t)$, échantillonnés à la fréquence F_s pendant une durée T_r .

$$I_{TDCA}(x, y) = \sum_{k=1}^n \mathbf{z}_k^T \downarrow^{\lceil F_s \tau_k(x, y) \rceil} (\mathbf{e}^*) \exp(2j\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.19)$$

L'algorithme est synthétisé par le schéma donné dans la Figure 1.6.

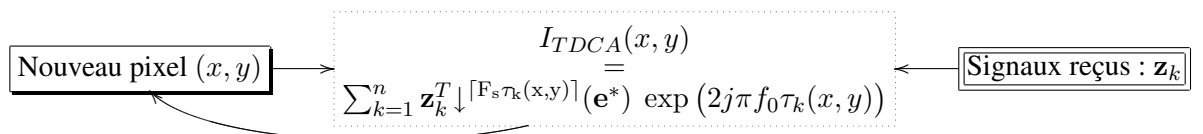


FIG. 1.6 – Schéma de l'algorithme TDCA.

Bien que cet algorithme soit assez intuitif, il a le défaut d'être lourd en terme de temps de calcul. L'algorithme de backprojection similaire au TDCA corrige en parti ce problème en utilisant un préfiltrage adapté.

1.2.2 Algorithme de Backprojection.

L'algorithme de Backprojection est basé sur le même principe que le TDCA. Il gagne cependant en performance de calcul comparé à ce dernier en effectuant une opération de préfiltrage adapté sur les données SAR.

Revenons à l'équation trouvée en (1.16) définissant l'amplitude complexe du pixel placé en (x, y) obtenu par TDCA :

$$I_{TDCA}(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_t z_k(t) m_k^*(t, x, y) dt \quad (1.20)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\int_t z_k(t) e^*(t - \tau(x, y)) dt \right) \exp(2j\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.21)$$

$$= \sum_{k=1}^n p_k(\tau_k(x, y)) \exp(2j\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.22)$$

Avec :

$$p_k(t) = \int_x z_k(x) e^*(x - t) dx \quad (1.23)$$

$$p_k(t) = z_k * e^*(-t) \quad (1.24)$$

Le signal obtenu par filtrage adapté de $z_k(t)$ par $e(t)$. On posera donc $I_{BP}(x, y)$:

$$I_{BP}(x, y) = \sum_{k=1}^n p_k(\tau_k(x, y)) \exp(2j\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.25)$$

l'intensité du pixel (x, y) obtenue par l'algorithme de Backprojection après filtrage adapté du signal $z_k(t)$ par $e(t)$ (Eq. (1.24)). En SAR, ce filtrage adapté est aussi appelé compression du signal $z_k(t)$ en distance.

Pour déterminer une version numérique de cet algorithme, posons \mathbf{z}_k et \mathbf{e} les vecteurs contenant les échantillons de $z_k(t)$ et $e(t)$. Soit \underline{e} le vecteur tel que chacun de ses éléments $\underline{e}(n)$ s'écrit pour tout $n \in [0, \lceil T_r F_s \rceil]$ en fonction des éléments de \mathbf{e} de la façon suivante :

$$\underline{e}(n) = e(-n \bmod (\lceil T_r F_s \rceil + 1)) \quad (1.26)$$

Le vecteur \mathbf{p}_k contenant les échantillons de $z_k(t)$ après filtrage adapté par $e(t)$ s'écrit :

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{z}_k * \underline{\mathbf{e}}^* \quad (1.27)$$

L'opération de convolution numérique étant lourde, on peut obtenir le même résultat en utilisant une convolution circulaire beaucoup plus rapide de par l'utilisation indirecte des TFD (et donc de la FFT). Pour que le vecteur contenant les $\lceil T_r F_s \rceil$ premiers éléments du produit de convolution numérique soit le

1.2. Algorithmes SAR classiques de formation d'image

même que celui contenant les éléments résultant de produit de convolution cyclique, il faut que \mathbf{z}_k ou $\underline{\mathbf{e}}$ contiennent suffisamment de 0 en début ou fin de vecteur :

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{z}_k \odot \underline{\mathbf{e}}^* \quad (1.28)$$

$$= \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}(\mathbf{z}_k) \text{TFD}^*(\underline{\mathbf{e}})) \quad (1.29)$$

Le vecteur \mathbf{p}_k ainsi obtenu contient $\lceil F_s T_r \rceil + 1$ éléments :

$$\mathbf{p}_k = [p_k(0) \quad \dots \quad p_k(\lceil F_s T_r \rceil - 1)]^T \quad (1.30)$$

L'intensité du pixel $I_{BP}(x, y)$ obtenu s'écrit donc :

$$I_{BP}(x, y) = \sum_{k=1}^n p_k(\lceil F_s \tau_k(x, y) \rceil) \exp(2j\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.31)$$

Cet algorithme est résumé par le schéma donné dans la Figure 1.7

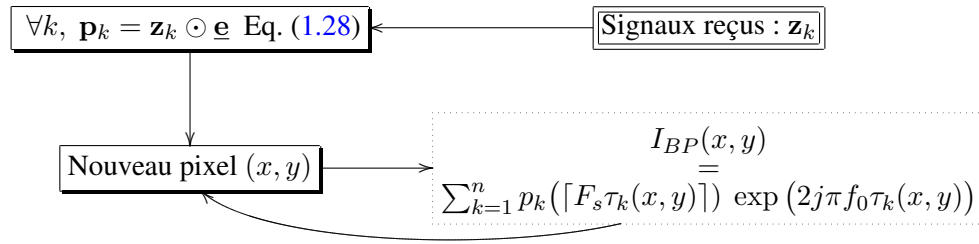


FIG. 1.7 – Schéma de l'algorithme de Backprojection.

Le résultat obtenu par l'algorithme de Backprojection est exactement le même que celui obtenu avec le TDCA. On a bien :

$$I_{BP}(x, y) = \sum_{k=1}^n p_k(\tau_k(x, y)) \exp(j2\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.32)$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_t z_k(t) e^*(t - \tau_k(x, y)) \exp(j2\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.33)$$

$$= I_{TDCA}(x, y) \quad (1.34)$$

Cependant, l'opération de filtrage adapté réduit la complexité de l'algorithme et accélère significativement le temps de calcul de l'image à former.

1.2.3 Algorithme de Migration Radial (AMR) ou Range Migration Algorithm (RMA).

L'algorithme RMA est un algorithme qui diverge des deux précédents d'un point de vue performance de calcul et par le type de données traitées. Les données SAR ne sont plus traitées temporellement, mais fréquemment afin d'exploiter la vitesse de calcul des Transformées de Fourier Rapides.

L'algorithme RMA tel que l'on peut le trouver dans la littérature est basé sur la décomposition en ondes planes. Comme précédemment, on se base sur le modèle que l'on a posé dans l'Eq. (1.9). Si on considère que tous les diffuseurs placés sur le plan $z = 0$:

$$z_k(t) = z(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} \sigma(x, y) e(t - \tau(u, x, y)) dx dy \quad (1.35)$$

où $\tau(u, x, y)$ est défini comme dans Eq.(1.3) en remplaçant u_k par u .

Considérons $Z(f, u)$ la transformée de Fourier 1-D de $z(t, u)$ par rapport au temps :

$$Z(f, u) = \int_{\mathbb{R}^2} \sigma(x, y) E(f) \exp \left(-j2\pi f \tau(u, x, y) \right) dx dy \quad (1.36)$$

Posons $P(f, u)$ le spectre du signal après filtrage adapté à $e(t)$. On considère que les deux équations (1.37) et (1.38) sont équivalentes à un coefficient prêt (ce qui n'est pas exact si $E(f)$ est nul). Si on a pour tout $f \in B$, $|E(f)| = 1$ (ou constant, ce qui est le plus souvent le cas) :

$$P(f, u) = Z(f, u) E(f)^* \quad (1.37)$$

$$= \frac{Z(f, u)}{E(f)}. \quad (1.38)$$

On a donc :

$$P(f, u) = P(k, u) = \int_{\mathbb{R}^2} \sigma(x, y) \exp \left(-j2\pi k \sqrt{x^2 + (u - y)^2} \right) dx dy \quad (1.39)$$

avec $k = 2f/c$. La méthode de la phase stationnaire [12] qui permet d'approximer une onde cylindrique par une somme continue d'ondes planes nous donne :

$$\exp \left(-j2\pi f \tau(u, x, y) \right) = \exp \left(-j2\pi k \sqrt{x^2 + (u - y)^2} \right) \quad (1.40)$$

$$= \int_{k_u=-k}^k \exp \left(j2\pi (\sqrt{k^2 - k_u^2} x + k_u (y - u)) \right) dk_u \quad (1.41)$$

$$\approx \int_{k_u} \exp \left(j2\pi (\sqrt{k^2 - k_u^2} x + k_u y) \right) \exp (-2\pi j k_u u) dk_u \quad (1.42)$$

$$\approx TF_{k_u \rightarrow u} \left[\exp \left(j2\pi (\sqrt{k^2 - k_u^2} x + k_u y) \right) \right] \quad (1.43)$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse en u sur $P(f, u)$, on obtient :

$$P(k, k_u) = TF_{u \rightarrow k_u}^{-1} [P(f, u)] \quad (1.44)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \sigma(x, y) \exp \left(j2\pi (\sqrt{k^2 - k_u^2} x + k_u y) \right) dx dy \quad (1.45)$$

Si on pose $k_x = \sqrt{k^2 - k_u^2}$ et $k_y = k_u$, on a :

$$P(k_x, k_y) = \int_{\mathbb{R}^2} \sigma(x, y) \exp \left(j2\pi (k_x x + k_y y) \right) dx dy \quad (1.46)$$

La transformation en k_x, k_y est connue sous le nom de transformation de Stolt [13].

Mis sous cette forme, on obtient l'ensemble des points de l'image $I_{RMA}(x, y) = \sigma(x, y)$ en appliquant une transformée de Fourier en k_x et k_y :

$$I_{RMA}(x, y) = TF_{(k_x, k_y) \rightarrow (x, y)}[P(k_x, k_y)] \quad (1.47)$$

Pour exposer la version numérique de l'algorithme RMA, posons \mathbf{E} la transformée de fourier discrète associée à $e(t)$ passé en bande de base, $\mathbf{P}_k^{k_u}$ représente le vecteur des échantillons de $P(k, k_u)$ défini équation (1.44) et \mathbf{P}^{k_x, k_y} la matrice des échantillons de $P(k_x, k_y)$ définie dans l'équation (1.46). La matrice I_{RMA} correspond à $I_{RMA}(x, y)$ pour tous les couples (x, y) considérés. L'algorithme RMA est synthétisé dans le schéma donné dans la Figure 1.14

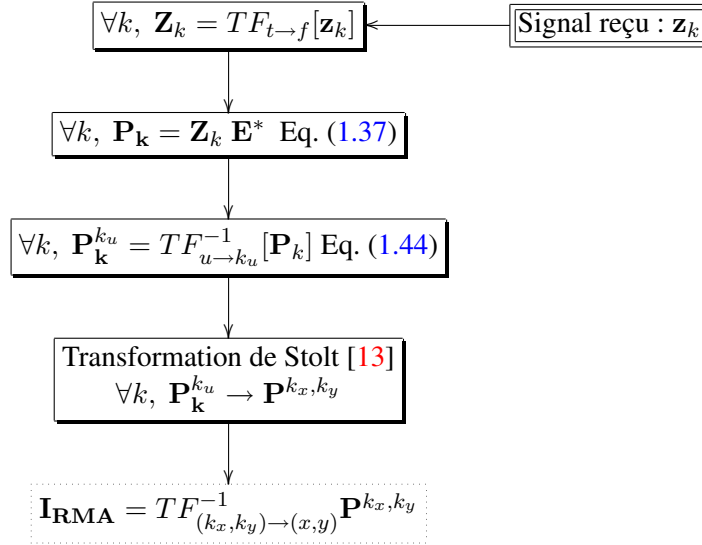


FIG. 1.8 – Schéma de l'algorithme RMA.

L'image obtenue avec l'algorithme RMA part d'une modélisation identique du signal rétrodiffusé que les algorithmes TDCA et Backprojection. L'équivalence des images obtenus avec ces différents algorithmes est démontrée et discutée dans [19][20].

1.2.4 Résolution d'une image SAR.

Les trois algorithmes que nous venons d'étudier forment une image équivalente sur laquelle on distingue deux paramètres de résolution : la résolution radiale δ_x qui donne la résolution en distance de l'image formée et la résolution transverse δ_y qui donne la résolution en azimuth de l'image.

- **Résolution radiale :** Cette valeur dépend de la largeur de bande B du signal émis. Elle est généralement approximée par :

$$\delta_x = \frac{c}{2B} \quad (1.48)$$

sous l'hypothèse que $B/f_0 \ll 1$, où f_0 est la fréquence centrale du signal.

- **Résolution transverse :** Cette valeur dépend de trois paramètres, la longueur L_{SAR} de l'antenne synthétique, la distance D séparant l'antenne et la cible et la fréquence f_0 du signal émis.

$$\delta_y = \frac{c D}{2f_0 L_{SAR}} \quad (1.49)$$

1.3 Algorithme de formation d'image SAR classique dérivé de la théorie de la détection

Dans la section précédente, on a vu trois algorithmes SAR de formation d'image aboutissant à des résultats équivalents. Cette partie introduit une nouvelle façon d'aborder la formation d'image SAR par la théorie de la détection et montre l'équivalence des résultats obtenus par rapport aux algorithmes classiques.

1.3.1 Formulation du problème de détection

Soit \mathbf{z} la concaténation des n vecteurs \mathbf{z}_k :

$$\mathbf{z} \in \mathbb{C}^M, \quad \mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T \quad \mathbf{z}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{z}_n^T]^T \quad (1.50)$$

Avec $M = n \lceil T_r F_s \rceil$. Pour chaque position (x, y) à imager, on considère les deux hypothèses H_0 et H_1 . L'hypothèse H_0 correspond au cas où le signal \mathbf{z} est un vecteur de bruit blanc complexe circulaire Gaussien \mathbf{n} , $CN(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. H_1 correspond au cas où \mathbf{z} est le signal \mathbf{r}_{xy} diffusé par un point isotrope en (x, y) , plus du bruit blanc Gaussien \mathbf{n} . \mathbf{r}_{xy} est la concaténation des signaux $\downarrow^{[F_s \tau_k(x, y)]} \mathbf{e}^T \exp(-2\pi f_0 \tau_k(x, y))$:

$$\mathbf{r}_{xy} = [\downarrow^{[F_s \tau_1(x, y)]} \mathbf{e}^T \exp(-2j\pi f_0 \tau_1(x, y)) \quad \dots \quad \downarrow^{[F_s \tau_n(x, y)]} \mathbf{e}^T \exp(-2j\pi f_0 \tau_n(x, y))]^T \quad (1.51)$$

où $\downarrow^{[F_s \tau_k(x, y)]} \mathbf{e} \exp(-2\pi f_0 \tau_k(x, y))$ est le signal correspondant au signal émis retardé de $\tau_k(x, y)$ mis en bande de base défini en (1.3).

Notre problème de détection est donc le suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} = \mathbf{n} \\ H_1 : \mathbf{z} = \alpha_{att} \mathbf{r}_{xy} + \mathbf{n} \end{cases} \quad (1.52)$$

où α_{att} est un coefficient complexe prenant en compte l'atténuation due à la propagation du signal et le coefficient de diffusion du point isotrope. Soit $p(\mathbf{z}|H_i)$ la fonction densité de probabilité de \mathbf{z} pour les hypothèses H_i ($i \in \{0, 1\}$) :

$$p(\mathbf{z}|H_0) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \frac{-\mathbf{z}^\dagger \mathbf{z}}{\sigma^2} \quad (1.53)$$

et

$$p(\mathbf{z}|H_1) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \frac{-(\mathbf{z} - \alpha_{att} \mathbf{r}_{xy})^\dagger (\mathbf{z} - \alpha_{att} \mathbf{r}_{xy})}{\sigma^2} \quad (1.54)$$

1.3.2 Processeur SAR Classique (SARC) basé sur des détecteurs de signaux dans un bruit de variance connue.

1.3.2.1 Détecteurs de signaux dans un bruit de variance connue

Afin de résoudre le problème de détection précédent, on construit un détecteur de Neyman- Pearson. Supposons que la variance σ^2 du bruit est connue. Le test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (RVG) de quantité test f_{C_1} est :

$$f_C(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\alpha_{att} \in \mathbb{C}} p(\mathbf{z}|H_1)}{p(\mathbf{z}|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \eta_C \quad (1.55)$$

1.3. Algorithme de formation d'image SAR classique dérivé de la théorie de la détection

η_C correspond au seuil choisi. Si $f_C(\mathbf{z}) > \eta_C$, H_1 est supposé vrai, sinon, c'est H_0 que l'on suppose exact. Si on considère $\ln f_C(\mathbf{z})$ nous obtenons de (1.54) et (1.53) que :

$$\ln f_C(\mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} - \min_{\alpha_{att} \in \mathbb{C}} \frac{\|\mathbf{z} - \alpha_{att} \mathbf{r}_{xy}\|^2}{\sigma^2} \quad (1.56)$$

$$= \frac{\|\mathbf{r}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2 \|\mathbf{r}_{xy}\|^2} \quad (1.57)$$

1.3.2.2 Implémentation du processeur SAR

Pour construire notre image SAR, nous fixons l'intensité $I(x, y)$ du pixel placé en (x, y) à :

$$I_{SARC}(x, y) = \ln(f_C(\mathbf{z})) = \frac{\|\mathbf{r}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2 \|\mathbf{r}_{xy}\|^2} = \frac{\|\mathbf{r}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2 n \|\mathbf{e}\|^2} \quad (1.58)$$

Si l'on considère $I_{TDCA}(x, y)$, l'amplitude du pixel généré par le TDCA donné dans l'équation (1.19), on avait :

$$I_{TDCA}(x, y) = \sum_{k=1}^n \mathbf{z}_k^T \downarrow [\mathbf{F}_s \tau_k(x, y)] \mathbf{e}^* \exp(2\pi f_0 \tau_k(x, y)) \quad (1.59)$$

$$= \mathbf{r}_{xy}^\dagger \mathbf{z} \quad (1.60)$$

On aura donc :

$$|I_{TDCA}(x, y)| = \frac{I_{SARC}(x, y)^{1/2}}{\mu} \quad (1.61)$$

Avec $\mu = \frac{1}{\sigma \sqrt{n} \|\mathbf{e}\|}$.

L'approche de la formation d'image SAR dérivée de la théorie de la détection est donc bien équivalente aux algorithmes classiques. Cette approche démontre que l'on peut concevoir la formation d'image SAR comme la détection de point isotrope. Les processeurs SAR classiques sont donc des détecteurs de points isotropes. Cette modélisation de la formation d'image SAR va nous permettre de modifier les problèmes de détection pour les adapter à de nouveaux modèles de cibles ou de bruit.

1.3.3 Processeur SAR Classique (SARC) basé sur des détecteurs de signaux dans un bruit de variance inconnue

1.3.3.1 Détecteurs SAR de signaux dans un bruit de variance inconnue

Généralement, la variance σ^2 du bruit est inconnue. Il s'agit donc développer un test indépendant de la variance σ^2 du bruit. Le RVG $\tilde{f}_C(\mathbf{z})$ s'écrit :

$$\tilde{f}_C(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\alpha_{att} \in \mathbb{C}, \sigma^2} p(\mathbf{z}|H_1)}{\max_{\sigma^2} p(\mathbf{z}|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lesseqgtr}} \tilde{\eta}_C \quad (1.62)$$

Soit $\hat{\mathbf{n}}_0$ une estimée du bruit selon H_0 et $\hat{\mathbf{n}}_1$ une estimée du bruit selon H_1 .

$$\hat{\mathbf{n}}_0 = \mathbf{z} \quad (1.63)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{z} - \hat{\alpha}_{att} \mathbf{r}_{xy} \quad (1.64)$$

avec $\hat{\alpha}_{att}$ l'estimé de α_{att} . On définit ainsi $\hat{\sigma}_i^2$ l'estimée de la variance du bruit selon H_i ($i \in \{0, 1\}$) :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\|\hat{\mathbf{n}}_i\|^2}{M} \quad (1.65)$$

Soit \mathbf{P}_r le projecteur orthogonal sur le vecteur \mathbf{r}_{xy} :

$$\mathbf{P}_r = \frac{\mathbf{r}_{xy}\mathbf{r}_{xy}^\dagger}{\|\mathbf{r}_{xy}\|^2} \quad (1.66)$$

D'après [8], les équations (1.63) et (1.64) deviennent :

$$\hat{\mathbf{n}}_0 = \mathbf{z} \quad (1.67)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{z} - \mathbf{P}_r \mathbf{z} \quad (1.68)$$

et la racine M^{ieme} du RVG $\tilde{f}_C(\mathbf{z})$ s'écrit :

$$\tilde{f}_C^{1/M} = \frac{\|\hat{\mathbf{n}}_0\|^2}{\|\hat{\mathbf{n}}_1\|^2} \quad (1.69)$$

$$= \frac{\|\mathbf{P}_r \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{P}_r^\perp \mathbf{z}\|^2} + 1 \quad (1.70)$$

$$= \frac{\|\mathbf{r}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{r}_{xy}\|^2 \|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{r}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} + 1 \quad (1.71)$$

1.3.3.2 Implémentation du processeur SAR

On pose $\tilde{I}_{SARC}(x, y)$ l'amplitude du pixel situé en (x, y) généré par l'algorithme SARC avec variance du bruit inconnue donnée par :

$$\tilde{I}_{SARC}(x, y) = \frac{\|\mathbf{r}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{n\|\mathbf{e}\|^2 \|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{r}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} \quad (1.72)$$

On peut synthétiser l'algorithme SARC (avec un bruit de variance connu ou pas) comme décrit dans le schéma de la Figure 1.9 :

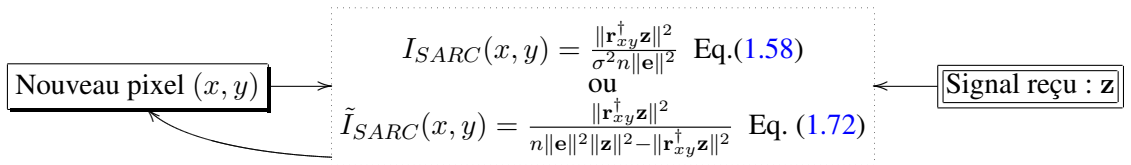


FIG. 1.9 – Schéma du l'algorithme SARC.

1.4 Application des processeurs SAR à un cas simple

Considérons la configuration suivante :

- Configuration de la scène : La scène est définie pour $x \in [90, 130]$ m, $y \in [-20, 20]$ m. Trois points isotropes sont placés en $(95, -15, 0)$, $(110, 0, 0)$ et $(125, 15, 0)$.
- Signal émis : Le signal $e(t)$ émis est un chirp de fréquence centrale $f_0 = 400$ MHz et de largeur de bande $B = 100$ MHz. Le temps d'émission est de $T_e = 5.10^{-7}$ s. On a : $e(t) = \exp\left(2\pi j\left((f_0 - \frac{B}{2})t + \frac{B}{2T_e}t^2\right)\right)$ (figure 1.10 et 1.11).
- configuration SAR : La trajectoire rectiligne de l'antenne est définie à une hauteur $h = 100$ m entre $u_1 = (0, -50, h)$ m et $u_{200} = (0, 50, h)$ m.

On veut imager les trois points isotropes avec des algorithmes de formation d'image SAR. La figure 1.12 représente le signal reçu (signal brut) en fonction du temps et en tout point de mesure de l'antenne. La figure 1.13 représente le signal filtré ou compressé comme défini en (1.24). Deux images représentant la scène sont données, l'une formée par un algorithme de Backprojection, l'autre par un algorithme RMA (figure 1.14). Les images produites par les algorithmes SARC sont donnés dans la figure 1.15. Pour la version "variance connue", le bruit est supposé homogène, σ^2 est fixé à 1. L'intensité des pixels des images obtenues par l'algorithme SARC et l'algorithme Backprojection (ou TDCA) diffèrent d'une puissance de 2 (voir equation (1.61)), ce qui explique la différence observée entre les deux images : la résolution n'est pas meilleurs avec l'algorithme SARC.

1.5 Conclusion

Après avoir modélisé et défini le type de données SAR que l'on utilise, trois algorithmes classiques de formation d'image sont présentés. Ces algorithmes diffèrent sur quelques aspects, aussi bien du point de vue de la forme des données SAR exploitées (temporelles, fréquentielles) que de la complexité des algorithmes. Cependant, les images formées par ces trois algorithmes sont équivalentes car partant de la même modélisation des signaux. La dernière section présente un autre type d'approche de formation d'image SAR. Elle suppose que chaque pixel à imager est soit le signal rétrodiffusé par un point isotrope et du bruit, soit seulement du bruit et utilise l'évaluation du Rapport de Vraisemblance Généralisé comme intensité du pixel de l'image. L'intensité du pixel obtenu est proportionnelle à l'intensité donnée par les algorithmes classiques de formation d'image. Cette relation nous permet de prouver que les processeurs SAR classiques peuvent être considérés comme des détecteurs de points isotropes. Dans le cadre de la détection de cibles, la description de celles-ci comme des ensembles de points isotropes n'est pas forcément réaliste et n'exploite en rien leurs propriétés intrinsèques de rétrodiffusion. Cependant, le formalisme utilisé dans la section 1.3 introduit par les algorithmes SARC met en évidence le lien existant entre l'imagerie SAR et la théorie de la détection.

On pourra donc obtenir de nouveaux processeurs SAR et améliorer les performances de détection en rendant le problème de détection considéré plus réaliste vis à vis des cibles à détecter. Le chapitre suivant part de cette idée et propose de développer des processeurs SAR en dérivant des détecteurs adaptés aux signaux rétrodiffusés par les cibles considérées. Ceci nous permet d'affiner la modélisation du problème de détection afin d'augmenter les performances (c'est à dire, par exemple, augmenter la probabilité de détection des cibles à taux de fausse alarme fixe).

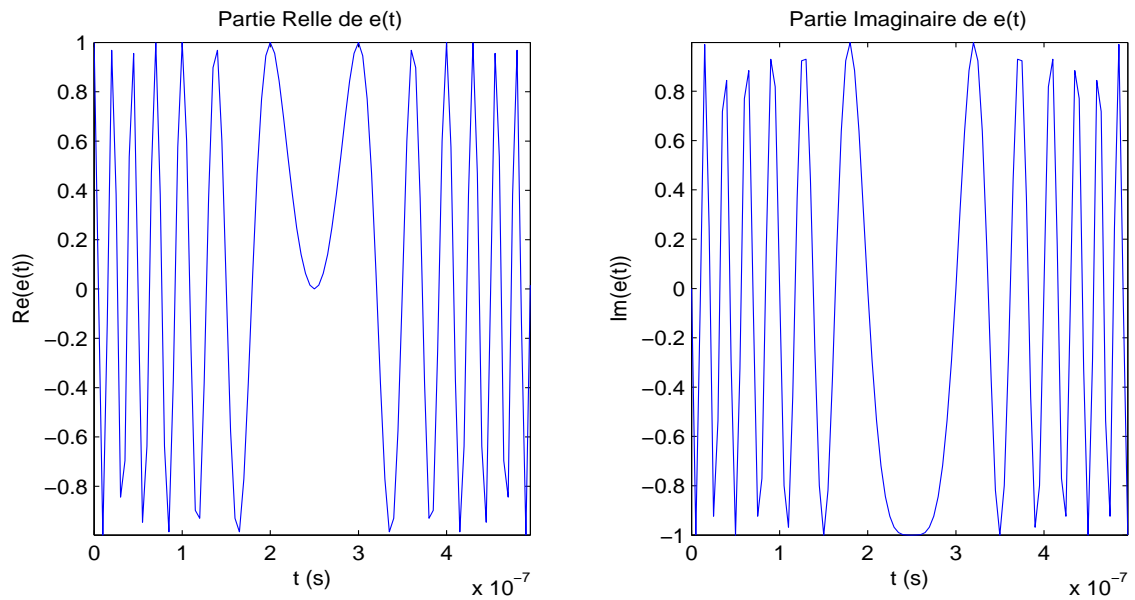


FIG. 1.10 – Signal émis en bande de base : le chirp rampe ascendante (à gauche, partie réelle, à droite, partie imaginaire).

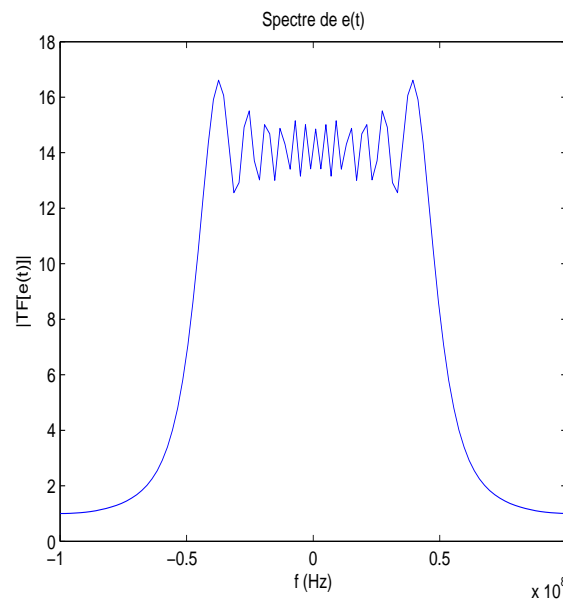


FIG. 1.11 – Spectre du signal émis en bande de base.

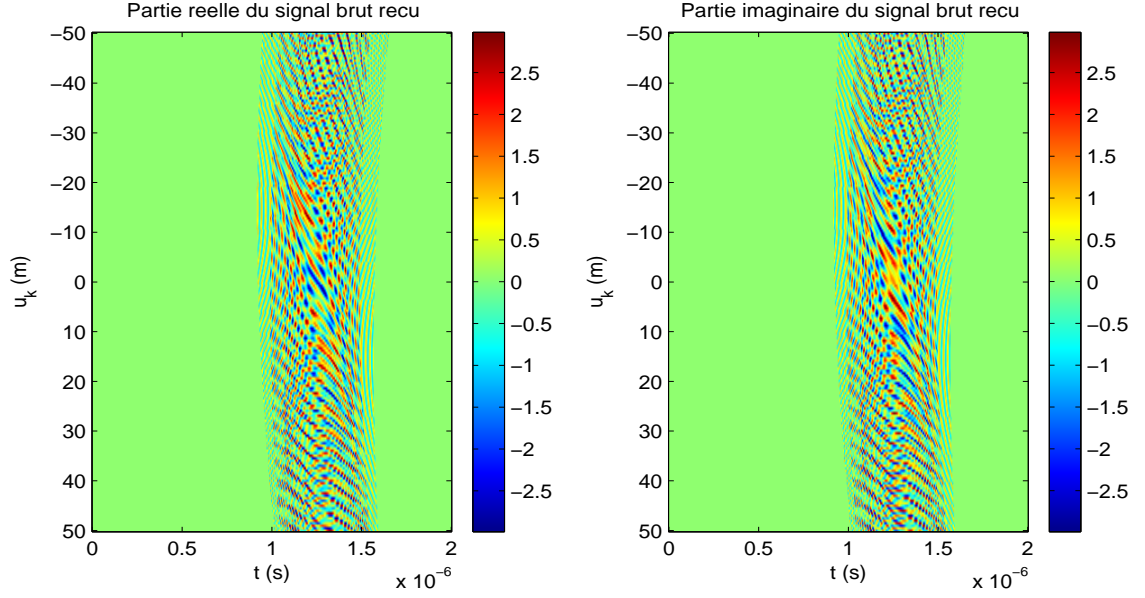


FIG. 1.12 – Signal brut reçu en bande de base en fonction du temps d'observation pour toutes les positions de l'antenne (à gauche, partie réelle, à droite, partie imaginaire).

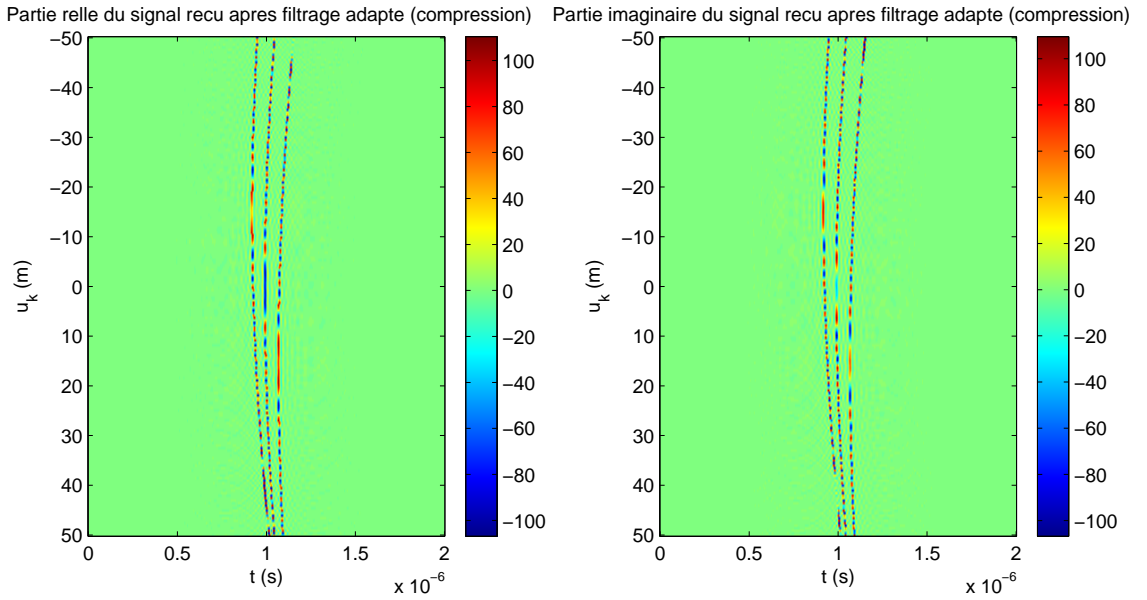


FIG. 1.13 – Signal compressé reçu en bande de base en fonction du temps d'observation pour toutes les positions de l'antenne (à gauche, partie réelle, à droite, partie imaginaire).

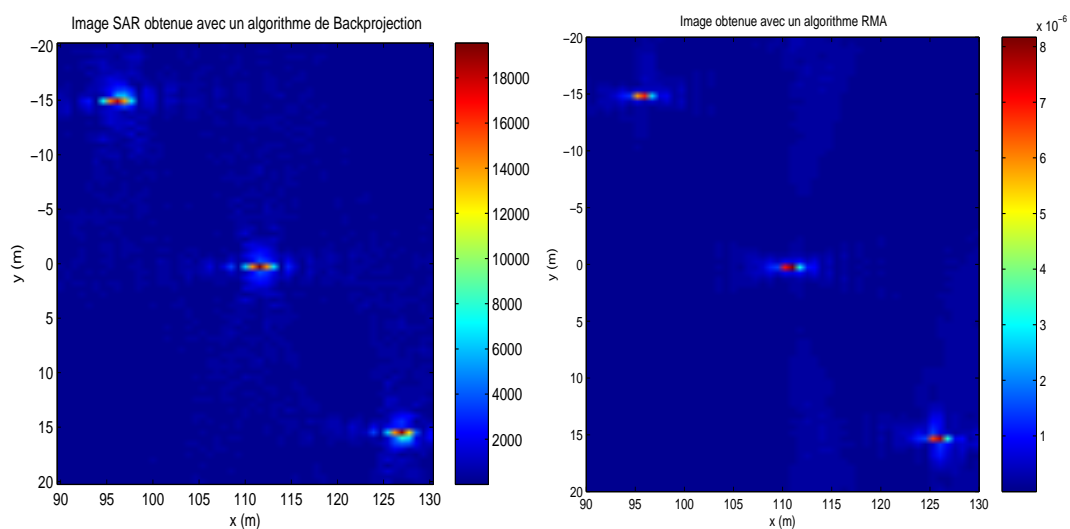


FIG. 1.14 – Image formée par un algorithme Backprojection (à gauche) et RMA (à droite).

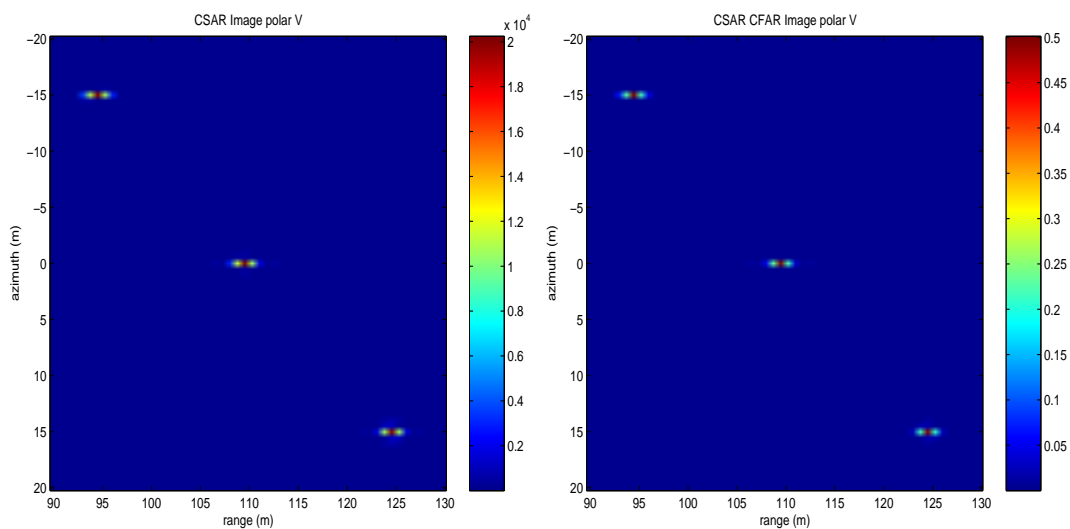


FIG. 1.15 – Image formée par un algorithme SARC variance du bruit connue (à gauche) et variance du bruit inconnue (à droite).

Chapitre 2

Détecteurs de sous espaces

Dans ce chapitre, nous proposons de partir d'un modèle que l'on aura choisi pour décrire la cible que l'on veut détecter. On considérera, dans une première partie, qu'à une position de la scène envisagée, le signal reçu est constitué soit du signal réfléchi par le modèle de cible que l'on aura choisi orienté dans une direction inconnue plus du bruit blanc Gaussien, soit seulement de bruit blanc. Cette approche a pour but d'augmenter la probabilité de détection de la cible, tout en conservant un taux de fausse alarme au même niveau que celui généré par un détecteur SARC. Pour résoudre ce problème de détection, nous dérivons un Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (TRVG) [8] qui aboutit à un Détecteur de Sous Espace Signaux (SES) [9], [10]. Dans une deuxième partie, on veut s'appliquer à réduire le niveau de fausse alarme. On considérera que la cible que l'on veut détecter est placée dans un environnement d'interférences générées par une certaine catégorie de diffuseurs. Le problème de détection précédent est donc adapté à cette nouvelle configuration et le TRGV aboutit à un nouveau type de détecteur de sous espace, le détecteur de Sous Espace Signal ou Interférence (SESI).

2.1 Détecteurs de Sous Espaces Signaux (SES)

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les algorithmes SARC (cf. section 1.3) considèrent qu'à une position donnée, les cibles à imager sont des ensembles de points isotropes. Cette hypothèse revient à supposer que les cibles à détecter sont des volumes aléatoires assimilable à des sphères (voir le chapitre d'Introduction). Cependant, si on considère des cibles manufacturées de structure bien définie, cette hypothèse se révèle inadaptée : ce type de cible, par exemple, rétrodiffuse souvent le signal émis dans des directions privilégiées (comme présenté dans [14]). Supposer qu'une cible manufacturée est un ensemble d'éléments canoniques d'orientations inconnues semble être une hypothèse plus réaliste. De plus, si l'ensemble des signaux rétrodiffusés par l'élément canonique choisi pour décrire la cible, quelque soit son orientation, appartient à un sous espace de faible dimension, il est possible de construire des détecteurs de Sous Espace Signal (SES) [8], [9], [10]. Dans cette partie, on présente le problème de détection modélisé et deux détecteurs, l'un supposant que la variance du bruit est connue, l'autre pas, dérivant du TRVG sont développés.

2.1.1 Formulation du problème de détection

A chaque position (x, y) à imager, considérons deux hypothèses H_0 et H_1 . H_0 correspond au cas où le signal reçu, \mathbf{z} (modélisé dans l'Eq. 1.50), est un bruit blanc Gaussien \mathbf{n} , $CN(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. H_1 correspond au cas où le signal \mathbf{z} est la somme d'un signal rétrodiffusé par un élément canonique choisi, de configuration inconnue, plus du bruit blanc Gaussien. A partir de maintenant, on considère que les différentes configurations du modèle choisi correspondent aux différentes orientations (α, β) définies dans la Figure 2.1, dans le cas où le modèle choisi est une plaque. α est l'angle de la première rotation autour de l'axe (z) qui transforme le repère (x, y, z) en (x', y', z') . β est la seconde rotation autour de l'axe (y') qui transforme le repère (x', y', z') en (x'', y'', z'') . Pour que l'on ait seulement besoin de deux rotations pour définir l'orientation d'un objet, il faut bien sûr que celui ci possède un axe de symétrie (ce qui sera souvent le cas). Si cette hypothèse n'est pas validée, une troisième rotation autour de (z'') est à considérer.

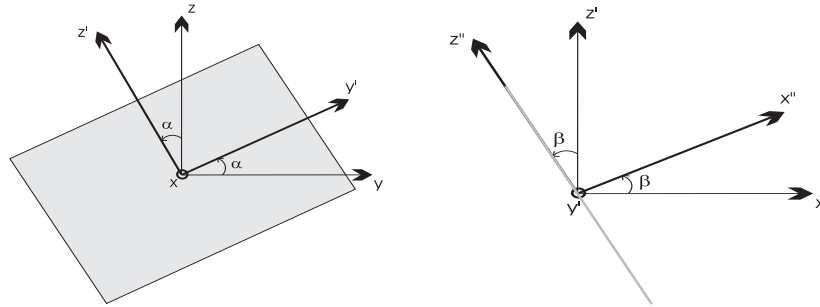


FIG. 2.1 – Rotations α et β dans le cas d'une plaque.

Le problème de détection peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} = \mathbf{n} \\ H_1 : \mathbf{z} = a \mathbf{y}(\alpha, \beta) + \mathbf{n} \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$\mathbf{y}(\alpha, \beta) = [\mathbf{y}_1(\alpha, \beta)^T \quad \mathbf{y}_2(\alpha, \beta)^T \quad \dots \quad \mathbf{y}_n(\alpha, \beta)^T]^T \quad (2.2)$$

2.1. Détecteurs de Sous Espaces Signaux (SES)

et $\mathbf{y}_k(\alpha, \beta)$ est le signal non bruité reçu à la position u_k , diffusé par le modèle choisi en (x, y) d'orientation (α, β) (exemple dans la figure 2.1). La quantité a est un coefficient complexe d'atténuation.

Résoudre ce problème de détection avec un TRVG revient à utiliser un banc de filtres adaptés à toutes les orientations possibles du modèle. Cette approche, comme expliqué dans l'introduction, est inapplicable. Nous allons donc supposer que l'ensemble décrit par $\mathbf{y}(\alpha, \beta)$ quand $(\alpha, \beta) \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \times [\beta_{min}, \beta_{max}]$, appartient à un sous espace $\langle H_{xy} \rangle$ de dimension D_H . Le problème de détection obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} = \mathbf{n} \\ H_1 : \mathbf{z} = \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n} \end{cases} \quad (2.3)$$

où les colonnes de $\mathbf{H}_{xy} \in \mathbb{C}^{M \times D_H}$ forment une base orthonormale du "sous espace modèle" $\langle H_{xy} \rangle$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{D_H}$ est le vecteur inconnu des coordonnées du signal $a\mathbf{y}(\alpha, \beta)$ dans la base \mathbf{H}_{xy} .

2.1.2 Détecteurs de sous espaces signaux dans un bruit de variance connue

Dans cette partie, on suppose que la variance σ^2 du bruit est connue. On va donc déterminer notre détecteur et calculer ses performances de détection à partir de cette donnée.

2.1.2.1 Détermination des détecteurs

Comme dans la section 1.3, on va utiliser un TRVG, de quantité test $f_S(\mathbf{z})$, pour résoudre le problème de détection précédent.

$$f_S(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{D_H}} p(\mathbf{z}|H_1)}{p(\mathbf{z}|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \eta_{S1} \quad (2.4)$$

où

$$p(\mathbf{z}|H_0) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \frac{-\mathbf{z}^\dagger \mathbf{z}}{\sigma^2} \quad (2.5)$$

et

$$p(\mathbf{z}|H_1) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \frac{-(\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda})^\dagger (\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda})}{\sigma^2} \quad (2.6)$$

Si on considère $\ln f_S(\mathbf{z})$, on obtient :

$$\ln f_S(\mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} - \frac{\min_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^D} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2} \quad (2.7)$$

$$= \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \quad (2.8)$$

La quantité test obtenue dans l'équation (2.8) est proportionnelle à la norme de la projection de \mathbf{z} dans le sous espace $\langle H_{xy} \rangle$. Plus \mathbf{z} est proche de $\langle H_{xy} \rangle$, plus le RVG est élevé, plus la probabilité que \mathbf{z} corresponde au signal réfléchi par le modèle que l'on a choisi est importante.

Si on compare le résultat obtenu dans l'Eq. (2.8) à celui obtenu dans la section 1.3, on peut remarquer que les détecteurs classiques sont en fait des cas particulier à 1 dimension des détecteurs à sous espace signaux, utilisant le point isotrope comme modèle. Dans ce cas, la base \mathbf{H}_{xy} sera $\frac{\mathbf{r}_{xy}}{\|\mathbf{r}_{xy}\|}$, avec \mathbf{r}_{xy} défini dans l'Eq. (1.51). Les détecteurs classiques sont donc des cas particuliers de détecteurs de sous espace.

2.1.2.2 Performances de détection

Posons $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}$ sous l'hypothèse H_0 et $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}$ sous l'hypothèse H_1 du problème de détection donné dans l'Eq.(2.3). On veut déterminer la probabilité de détection et la probabilité de fausse alarme liée au détecteur trouvé donné dans l'équation 2.8.

– **Probabilité de détection** : $P(\ln f_S(\mathbf{z}_1) > \eta_{S_1})$.

La distribution de $\ln f_S(\mathbf{z}_1)$ est bien connue, puisqu'il s'agit d'un χ^2 décentré [8]. On a :

$$\ln f_S(\mathbf{z}_1) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}_1\|^2}{\sigma^2} \quad (2.9)$$

$$\sim \frac{1}{2}\chi^2(2D_H, 2\frac{\|\boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}) \quad (2.10)$$

– **Probabilité de fausse alarme** : $P(\ln f_S(\mathbf{z}_0) > \eta_{S_1})$

La distribution de $\ln f_S(\mathbf{z}_0)$ est elle aussi bien connue, il s'agit d'un χ^2 centré [8]. On a :

$$\ln f_S(\mathbf{z}_0) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}_0\|^2}{\sigma^2} \quad (2.11)$$

$$\sim \frac{1}{2}\chi^2(2D_H, 0) \quad (2.12)$$

Le calcul de la probabilité de fausse alarme nous donne que le détecteur de sous espaces signaux est à taux de fausse alarme constant ou Constant False Alarm Rate (CFAR), la probabilité de fausse alarme est indépendante de la variance du bruit. On peut donc trouver un seuil garantissant une probabilité de fausse alarme donnée.

2.1.3 Détecteurs de sous espaces signaux dans un bruit de variance inconnue

Dans cette partie, on suppose que la variance du bruit σ^2 est inconnue.

2.1.3.1 Détermination du détecteur

Comme dans la section 1.3, on utilise le Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (TRVG) de quantité test $f'_S(\mathbf{z})$ pour résoudre le problème de détection précédent.

$$f'_S(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{D_H \times 1}, \sigma} p(\mathbf{z}|H_1)}{\max_{\sigma} p(\mathbf{z}|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lesseqgtr}} \eta_{S_2} \quad (2.13)$$

où $p(\mathbf{z}|H_0)$ et $p(\mathbf{z}|H_1)$ sont définis comme précédemment.

Soit $\hat{\mathbf{n}}_0$ une estimée du bruit selon H_0 et $\hat{\mathbf{n}}_1$ une estimée du bruit selon H_1 .

$$\hat{\mathbf{n}}_0 = \mathbf{z} \quad (2.14)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \quad (2.15)$$

avec $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ l'estimé de $\boldsymbol{\lambda}$. On définit ainsi $\hat{\sigma}_i^2$ l'estimée de la variance du bruit selon H_i ($i \in \{0, 1\}$) :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{M} \|\hat{\mathbf{n}}_i\|^2 \quad (2.16)$$

2.1. Détecteurs de Sous Espaces Signaux (SES)

Soit \mathbf{P}_H le projecteur orthogonal sur le sous espace $\langle H_{xy} \rangle$:

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{H}_{xy} \mathbf{H}_{xy}^\dagger \quad (2.17)$$

D'après [8], les équations (2.14) et (2.15) deviennent :

$$\hat{\mathbf{n}}_0 = \mathbf{z} \quad (2.18)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{z} - \mathbf{P}_H \mathbf{z} \quad (2.19)$$

et la racine M^{ieme} du RVG $f'_S(\mathbf{z})$ s'écrit :

$$f'_S(\mathbf{z})^{1/M} = \frac{\|\hat{\mathbf{n}}_0\|^2}{\|\hat{\mathbf{n}}_1\|^2} \quad (2.20)$$

$$= \frac{\|\mathbf{P}_H \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}\|^2} + 1 \quad (2.21)$$

$$= \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} + 1 \quad (2.22)$$

avec $\mathbf{P}_H^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_H$. On considérera simplement :

$$\tilde{f}'_S(\mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{P}_H \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}\|^2} \quad (2.23)$$

$$= \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} \quad (2.24)$$

2.1.3.2 Performances de détection

– **Probabilité de détection** : $P(\tilde{f}'_S(\mathbf{z}_1) > \eta_{S_2})$.

On a :

$$P(\tilde{f}'_S(\mathbf{z}_1)^{1/M} > \eta_{S_2}) = P\left(\frac{M - D_H}{D_H} \tilde{f}'_S(\mathbf{z}_1)^{1/M} > \frac{M - D_H}{D_H} \eta_{S_2}\right) \quad (2.25)$$

La statistique de $\frac{M - D_H}{D_H} \tilde{f}'_S(\mathbf{z}_1)$ est bien connue, puisqu'il s'agit d'une F -distribution simplement décentrée [8]. On a :

$$\frac{M - D_H}{D_H} \tilde{f}'_S(\mathbf{z}_1)^{1/M} = \frac{M - D_H}{D_H} \frac{\|\mathbf{P}_H \mathbf{z}_1\|^2}{\|\mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}_1\|^2} \quad (2.26)$$

$$\sim F(2D_H, 2(M - D_H), \frac{2\|\boldsymbol{\lambda}^2\|}{\sigma^2}, 0) \quad (2.27)$$

– **Probabilité de fausse alarme** : $P(\tilde{f}'_S(\mathbf{z}_0) > \eta_{S_1})$

De même que précédemment, on a :

$$P(\tilde{f}'_S(\mathbf{z}_0) > \eta_{S_2}) = P\left(\frac{M - D_H}{D_H} \tilde{f}'_S(\mathbf{z}_0) > \frac{M - D_H}{D_H} \eta_{S_2}\right) \quad (2.28)$$

Chapitre 2. Détecteurs de sous espaces

La statistique de $\frac{M-D_H}{D_H} \tilde{f}'_S(\mathbf{z}_0)$ est une F -distribution centrée [8]. On a :

$$\frac{M-D_H}{D_H} \tilde{f}'_S(\mathbf{z}_0) = \frac{M-D_H}{D_H} \frac{\|\mathbf{P}_H \mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}_0\|^2} \quad (2.29)$$

$$\sim F(2D_H, 2(N-D_H), 0, 0) \quad (2.30)$$

Comme le détecteur SES dans un bruit de variance connue, le détecteur SES dans un bruit de variance inconnue est CFAR.

2.2 Détecteurs de Sous Espaces Signaux ou Interférences (SESI)

Le modèle utilisé précédemment considère qu'à une position donnée, le signal reçu est constitué soit du signal rétrodiffusé par un élément canonique caractéristique de la cible, soit du bruit blanc Gaussien. L'hypothèse émise sur la nature du bruit est faible et a l'avantage de n'envisager aucun environnement de détection en particulier. Il se peut cependant que l'on connaisse dans certains contextes une partie des diffuseurs à l'origine des interférences dans le signal reçu : c'est le cas par exemple de la détection de cibles sous couvert forestier, où les troncs d'arbre constituent la plus grande source de fausses alarmes. Dans ce cas là, on peut donc considérer deux types d'hypothèses : à une position considérée, le signal reçu est soit du bruit blanc Gaussien plus la rétrodiffusion par l'élément canonique caractéristique de la cible, soit du bruit blanc Gaussien plus la rétrodiffusion par l'élément canonique caractéristique de l'interférence. Si de plus, les sous espaces générés par ces deux éléments canoniques, quelque soit leurs orientations, appartiennent à des sous espaces de faibles dimensions, on peut construire des détecteurs de Sous Espaces Signaux ou Interférences (SESI). Ce détecteur aura l'avantage, comme le détecteur SES, de prendre en compte des modèles adaptés aux cibles à détecter afin d'augmenter la probabilité de détection, mais aussi des modèles d'interférences adaptés au fouillis ambiant afin de réduire la probabilité de fausse alarme. Comme précédemment, on présente dans cette partie le problème de détection modélisé et deux détecteurs, l'un supposant que la variance du bruit est connue, l'autre inconnue, dérivant du TRVG.

2.2.1 Problème de détection

Notre nouveau problème de détection peut être décrit comme suit : pour une position (x, y) donnée, H_0 correspond au cas où le signal reçu, \mathbf{z} est du bruit blanc Gaussien \mathbf{n} , $CN(0, \sigma^2 \mathbf{I})$, plus le signal rétrodiffusé par un diffuseur interférant $\mathbf{i}(\gamma, \delta)$. Le diffuseur interférant est décrit par un élément canonique donné d'orientation (γ, δ) . H_1 correspond au cas où le signal reçu est la somme d'un signal, $\mathbf{y}(\alpha, \beta)$, rétrodiffusé par un élément canonique choisi d'orientation (α, β) , plus \mathbf{n} . Les figures 2.2 et 2.3 illustrent cette configuration dans le cas où le modèle de cible est une plaque et le modèle d'interférence est un cylindre.

Ces deux hypothèses supposent que la cible et le diffuseur interférant ne peuvent pas être à la même position.

Nous obtenons donc le problème de détection suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} = a_0 \mathbf{i}(\gamma, \delta) + \mathbf{n} \\ H_1 : \mathbf{z} = a_1 \mathbf{y}(\alpha, \beta) + \mathbf{n} \end{cases} \quad (2.31)$$

Où a_0 et a_1 sont deux coefficients d'atténuation complexe, $(\alpha, \beta) \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \times [\beta_{min}, \beta_{max}]$ et $(\gamma, \delta) \in [\gamma_{min}, \gamma_{max}] \times [\delta_{min}, \delta_{max}]$.

Supposons :

$$\forall (\alpha, \beta) \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \times [\beta_{min}, \beta_{max}], \quad \mathbf{y}(\alpha, \beta) \in \langle H_{xy} \rangle \quad (2.32)$$

$$\forall (\gamma, \delta) \in [\gamma_{min}, \gamma_{max}] \times [\delta_{min}, \delta_{max}], \quad \mathbf{i}(\gamma, \delta) \in \langle J_{xy} \rangle \quad (2.33)$$

Où $\langle H_{xy} \rangle$ et $\langle J_{xy} \rangle$ sont deux sous espaces de dimensions D_H et D_J . En posant $\mathbf{H}_{xy} \in \mathbb{C}^{M \times D_H}$ et $\mathbf{J}_{xy} \in \mathbb{C}^{M \times D_J}$ deux bases orthonormées de $\langle H_{xy} \rangle$ et $\langle J_{xy} \rangle$, on peut récrire le problème de détection (2.31) comme suit :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} = \mathbf{J}_{xy} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \\ H_1 : \mathbf{z} = \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{n} \end{cases} \quad (2.34)$$

avec $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{D_J}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{D_H}$ deux vecteurs de coordonnées inconnues.

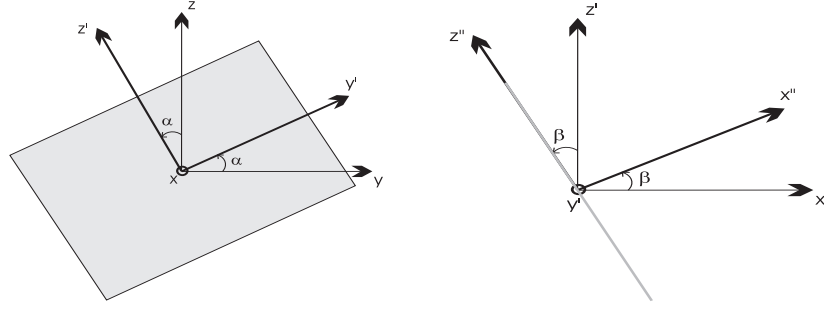


FIG. 2.2 – Rotations α et β dans le cas où le modèle de cible est une plaque.

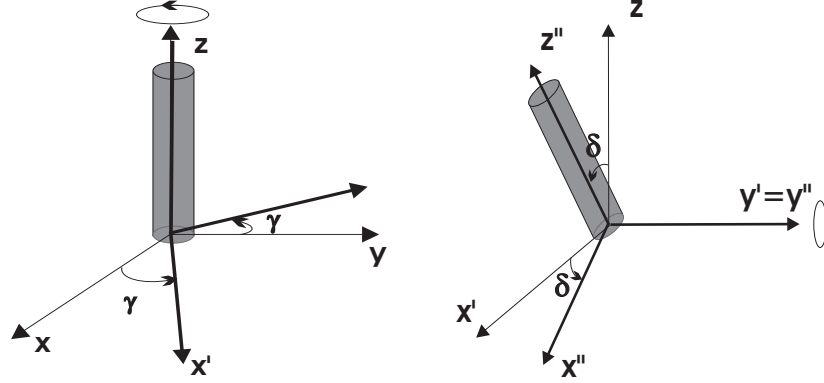


FIG. 2.3 – Rotations γ et δ dans le cas où le modèle d'interférence est un cylindre.

2.2.2 Détecteurs de sous espaces signaux ou interférences dans un bruit de variance connue

Dans cette partie, on suppose que la variance σ^2 du bruit est connue. On va donc déterminer notre détecteur et calculer ses performances de détection à partir de cette donnée.

2.2.2.1 Détermination des détecteurs

Comme précédemment, on applique un TRVG au test (2.34). Le RVG s'écrit $f_{SI}(\mathbf{z})$.

$$f_{SI}(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\lambda \in \mathbb{C}^{D_H}} p(\mathbf{z}|H_1)}{\max_{\mu \in \mathbb{C}^{D_J}} p(\mathbf{z}|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \eta_{SI_1} \quad (2.35)$$

où

$$p(\mathbf{z}|H_0) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \frac{-(\mathbf{z} - \mathbf{J}_{xy}\lambda)^\dagger (\mathbf{z} - \mathbf{J}_{xy}\lambda)}{\sigma^2} \quad (2.36)$$

et

$$p(\mathbf{z}|H_1) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \frac{-(\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy}\lambda)^\dagger (\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy}\lambda)}{\sigma^2} \quad (2.37)$$

Posons $\mathbf{P}_H = \mathbf{H}_{xy} \mathbf{H}_{xy}^\dagger$ le projecteur orthogonal sur $\langle H_{xy} \rangle$ et $\mathbf{P}_J = \mathbf{J}_{xy} \mathbf{J}_{xy}^\dagger$ le projecteur orthogonal

2.2. Détecteurs de Sous Espaces Signaux ou Interférences (SESI)

sur $\langle J_{xy} \rangle$. Si on considère $\ln f_{SI}(\mathbf{z})$, on obtient :

$$\ln f_{SI}(\mathbf{z}) = \frac{\min_{\mu \in \mathbb{C}^{D_J}} \|\mathbf{z} - \mathbf{J}_{xy}\mu\|^2}{\sigma^2} - \frac{\min_{\lambda \in \mathbb{C}^{D_H}} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy}\lambda\|^2}{\sigma^2} \quad (2.38)$$

$$= \frac{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_{\mathbf{H}} \mathbf{z} - \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_{\mathbf{J}} \mathbf{z}}{\sigma^2} \quad (2.39)$$

$$= \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \quad (2.40)$$

Le résultat obtenu dans l'Eq. (2.40) diffère de celui obtenu par le détecteur SES dans l'Eq. (2.8) par la prise en considération du sous espace interférence. La norme de la projection de \mathbf{z} dans le sous espace interférence $\langle J_{xy} \rangle$ est soustraite à celle de la projection de \mathbf{z} dans le sous espace signal $\langle H_{xy} \rangle$. Plus \mathbf{z} est “proche” de $\langle H_{xy} \rangle$, c'est à dire de la cible que l'on recherche, plus la quantité $\ln f_{SI}(\mathbf{z})$ est importante. Plus \mathbf{z} est “proche” de $\langle J_{xy} \rangle$, c'est à dire des diffuseurs sources des interférences, plus $\ln f_{SI}(\mathbf{z})$ est petit.

2.2.2.2 Performances de détection

Posons $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}$ sous l'hypothèse H_0 et $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}$ sous l'hypothèse H_1 du problème de détection donné dans l'Eq.(2.34).

– **Probabilité de détection** : $P(\ln f_{SI}(\mathbf{z}_1) > \eta_{SI_1})$

On a :

$$\ln f_{SI}(\mathbf{z}_1) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}_1\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}_1\|^2}{\sigma^2} \quad (2.41)$$

$$\sim \frac{1}{2}\chi^2(2D_H, \frac{2\|\boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2}\chi^2(2D_J, 2\frac{\|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{H}_{xy}\boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}) \quad (2.42)$$

On peut distinguer deux cas :

– Si $\langle H_{xy} \rangle$ et $\langle J_{xy} \rangle$ sont orthogonaux on a directement :

$$\ln f_{SI}(\mathbf{z}_1) \sim \frac{1}{2}\chi^2(2D_H, \frac{2\|\boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2}\chi^2(2D_J, 0) \quad (2.43)$$

Où $\ln f_{SI}(\mathbf{z}_1)$ est une différence de χ^2 indépendants.

– Si $\langle H_{xy} \rangle$ et $\langle J_{xy} \rangle$ ne sont pas orthogonaux :

Posons \mathbf{R} la matrice hermitienne suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_{xy}\mathbf{H}_{xy}^\dagger - \mathbf{J}_{xy}\mathbf{J}_{xy}^\dagger \quad (2.44)$$

Posons \mathbf{a}_k les vecteurs propres contenus dans la matrice \mathbf{A} associés aux valeurs propres λ_k , tels que :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^\dagger \quad (2.45)$$

On a donc :

$$\frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}_1\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}_1\|^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^M \frac{\lambda_k |\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{z}_1|^2}{\sigma^2} \quad (2.46)$$

On a, $\forall k \in [1, l]$, $\lambda_k > 0$ et $\forall k \in [l+1, D_M]$, $\lambda_k < 0$.

$\ln f_{SI}(\mathbf{z}_1)$ est une différence de combinaison linéaire de χ^2 indépendants à coefficients positifs :

$$\ln f_{SI}(\mathbf{z}_1) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \lambda_k \chi^2(2, \frac{2\|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2} \sum_{j=l+1}^{D_M} |\lambda_j| \chi^2(2, \frac{2\|\mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}) \quad (2.47)$$

Une solution numérique au calcul de cette distribution est donnée par l'annexe A.1 et dans [16].

– **Probabilité de Fausse Alarme** : $P(\ln f_{SI}(\mathbf{z}_0) > \eta_{SI})$

En reprenant les résultats trouvés dans la partie probabilité de détection, on obtient :

– Si \mathbf{H}_{xy} et \mathbf{J}_{xy} sont orthogonaux :

$$\ln f_{SI}(\mathbf{z}_0) \sim \frac{1}{2} \chi^2(2D_H, 2\frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{J} \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2} \chi^2(2D_J, 2\frac{\|\boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}) \quad (2.48)$$

Où $\ln f_{SI}(\mathbf{z}_0)$ est une différence de χ^2 indépendants.

– Si \mathbf{H}_{xy} et \mathbf{J}_{xy} ne sont pas orthogonaux :

$\ln f_{SI}(\mathbf{z}_0)$ est une différence de combinaison linéaire de χ^2 indépendants.

$$\ln f_{SI}(\mathbf{z}_0) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \lambda_k \chi^2(2, 2\frac{\|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{J}_{xy} \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2} \sum_{j=l+1}^{D_M} |\lambda_j| \chi^2(2, 2\frac{\|\mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{J}_{xy} \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}) \quad (2.49)$$

Une solution numérique au calcul de cette distribution est donnée par l'annexe A.1 et dans [16].

A la différence des détecteurs SES, le détecteur SESI avec bruit de variance connue n'est pas CFAR : la probabilité de fausse alarme dépend de la variance du bruit. On ne pourra pas garantir avec ce détecteur un taux de fausse alarme constant pour un seuil donné quelque soit le niveau du bruit, ni tracer de courbe de performance empirique significative. Cependant, l'application d'imagerie destinée à ce détecteur, décrite dans le chapitre suivant, exploite principalement la valeur du RVG intervenant dans le test à deux hypothèses. Elle s'intéresse en la capacité du "détecteur" à avoir un RVG plus faible que celui du détecteur SES lorsque la position testée correspond à une interférence.

2.2.3 Détecteurs de sous espaces signaux ou interférences dans un bruit de variance inconnue

Dans cette section, on suppose que la variance σ^2 du bruit est inconnue. On développe donc un détecteur de quantité test indépendante à σ^2 et adapté au problème de détection (2.34).

2.2. Détecteurs de Sous Espaces Signaux ou Interférences (SESI)

2.2.3.1 Détermination du détecteur

Le TRVG appliqué au problème de détection (2.34) nous donne :

$$f'_{SI}(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{D_H, \sigma}} p(\mathbf{z}|H_1)}{\max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{D_J, \sigma}} p(\mathbf{z}|H_0)} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\leq}} \eta_{SI_1} \quad (2.50)$$

où

$$p(\mathbf{z}|H_0) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \frac{-(\mathbf{z} - \mathbf{J}_{xy} \boldsymbol{\lambda})^\dagger (\mathbf{z} - \mathbf{J}_{xy} \boldsymbol{\lambda})}{\sigma^2} \quad (2.51)$$

et

$$p(\mathbf{z}|H_1) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \frac{-(\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda})^\dagger (\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda})}{\sigma^2} \quad (2.52)$$

La maximisation de $p(\mathbf{z}|H_1)$ par rapport à $\boldsymbol{\lambda}$ et σ est obtenue pour :

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z} \quad (2.53)$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{M} \|\mathbf{z} - \mathbf{H}_{xy} \hat{\boldsymbol{\lambda}}\|^2 \quad (2.54)$$

De même, la maximisation de $p(\mathbf{z}|H_0)$ par rapport à $\boldsymbol{\mu}$ et σ est obtenue pour :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z} \quad (2.55)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{M} \|\mathbf{z} - \mathbf{J}_{xy} \hat{\boldsymbol{\mu}}\|^2 \quad (2.56)$$

Posons $\mathbf{P}_H = \mathbf{H}_{xy} \mathbf{H}_{xy}^\dagger$ le projecteur orthogonal sur $\langle H_{xy} \rangle$ et $\mathbf{P}_J = \mathbf{J}_{xy} \mathbf{J}_{xy}^\dagger$ le projecteur orthogonal sur $\langle J_{xy} \rangle$. La racine M^{ieme} du RVG $f'_{SI}(\mathbf{z})$ s'écrit :

$$f'_{SI}(\mathbf{z})^{1/M} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2} \quad (2.57)$$

$$= \frac{\|\mathbf{P}_J^\perp \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}\|^2} \quad (2.58)$$

$$= \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} + 1 \quad (2.59)$$

Où $\mathbf{P}_H^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_H$ et $\mathbf{P}_J^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_J$. Afin de référencer le détecteur à 0, on considérera simplement :

$$\tilde{f}'_{SI}(\mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} \quad (2.60)$$

2.2.3.2 Performances de détection

Posons $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}$ sous l'hypothèse H_0 et $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}$ sous l'hypothèse H_1 du problème de détection donné dans l'Eq.(2.34).

– **Probabilité de détection** : $P(\tilde{f}'_{SI}(\mathbf{z}_1) > \eta_{SI_2})$

Chapitre 2. Détecteurs de sous espaces

- Si $\langle H_{xy} \rangle^\perp$ et $\langle J_{xy} \rangle^\perp$ sont orthogonaux :

L'annexe A.2 montre que :

$$P(\tilde{f}'_{SI}(\mathbf{z}_1) > \eta_{SI_2}) = P\left(\left(\frac{M-D_H}{M-D_J}(\tilde{f}'_{SI}(\mathbf{z}_1) - 1) > \frac{M-D_H}{M-D_J}(\eta_{SI_2} - 1)\right)\right) \quad (2.61)$$

Avec $\frac{M-D_H}{M-D_J}(\tilde{f}'_{SI}(\mathbf{z}_1) - 1)$ suivant la F -distribution doublement décentrée : $F(2(M-D_J), 2(M-D_H), 2\frac{\|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}, 2\frac{\|\boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2})$.

- Si $\langle H_{xy} \rangle^\perp$ et $\langle J_{xy} \rangle^\perp$ ne sont pas orthogonaux :

Posons $\mathbf{a}_k \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, les vecteurs propres et λ_k les valeurs propres de la matrice \mathbf{R} définie par :

$$\mathbf{R} = (1 + \eta_{SI_2})\mathbf{P}_H - \mathbf{P}_J - \eta_{SI_2}\mathbf{I} \quad (2.62)$$

Avec \mathbf{P}_H et \mathbf{P}_J les projecteurs orthogonaux sur $\langle H_{xy} \rangle$ et $\langle J_{xy} \rangle$.

L'annexe A.2 montre que :

$$P(\tilde{f}_{SI}(\mathbf{z}_1)^{1/M} > \eta_{SI_2}) = P(\hat{f}(\mathbf{z}_1, \eta_{SI_2}) > 0) \quad (2.63)$$

Avec :

$$\hat{f}(\mathbf{z}_1, \eta_{SI_2}) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \lambda_k \chi^2(2, 2\frac{\|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2} \sum_{j=l+1}^M |\lambda_j| \chi^2(2, 2\frac{\|\mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{H}_{xy} \boldsymbol{\lambda}\|^2}{\sigma^2}) \quad (2.64)$$

[16] présente une méthode pour déterminer numériquement la distribution d'une différence de combinaisons linéaires à coefficients positifs de χ^2 indépendants .

- **Probabilité fausse alarme** : $P(\tilde{f}_{SI}(\mathbf{z}_0)^{1/M} > \eta_{SI_2})$

De même que pour le calcul de la probabilité de détection, on a :

- Si $\langle H_{xy} \rangle^\perp$ et $\langle J_{xy} \rangle^\perp$ sont orthogonaux :

L'annexe A.2 montre que :

$$P(f_{SI}(\mathbf{z}_0) > \eta_{SI_2}) = P\left(\left(\frac{M-D_H}{M-D_J}(f_{SI}(\mathbf{z}_0) - 1) > \frac{M-D_H}{M-D_J}(\eta_{SI_2} - 1)\right)\right) \quad (2.65)$$

Avec $\frac{M-D_H}{M-D_J}(f_{SI}(\mathbf{z}_0) - 1)$ suivant la F -distribution doublement décentrée : $F(2(M-D_J), 2(M-D_H), 2\frac{\|\boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}, 2\frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{J}_{xy} \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2})$.

- Si $\langle H_{xy} \rangle^\perp$ et $\langle J_{xy} \rangle^\perp$ ne sont pas orthogonaux :

$$P(\tilde{f}_{SI}(\mathbf{z}_0)^{1/M} > \eta_{SI_2}) = P(\hat{f}(\mathbf{z}_0, \eta_{SI_2}) > 0) \quad (2.66)$$

Avec :

2.2. Détecteurs de Sous Espaces Signaux ou Interférences (SESI)

$$\hat{f}(\mathbf{z}_0, \eta_{SI_2}) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \lambda_k \chi^2\left(2, 2 \frac{\|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{J}_{xy} \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=l+1}^M |\lambda_j| \chi^2\left(2, 2 \frac{\|\mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{J}_{xy} \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.67)$$

Comme pour le détecteur SESI considérant un bruit de variance connue, ce détecteur n'est pas CFAR, cependant, la même remarque que dans le cas "variance connue" s'applique.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé deux types de détecteurs de sous espaces : le premier est basé uniquement sur la détection d'un sous espace signal, le sous espace considéré correspond à celui généré par l'ensemble des signaux rétrodiffusés par un modèle de cible. Il permet d'augmenter la probabilité de détection en projetant le signal reçu dans un sous espace signal adapté.

Le second, comme le premier, est spécialisé dans la détection de sous espaces signaux, mais aussi de sous espaces interférences générés par des diffuseurs que l'on aura aussi modélisés. Il a l'avantage par rapport au premier d'augmenter la probabilité de détection en projetant le signal reçu dans le sous espace cible et de réduire la probabilité de fausse alarme en retranchant la projection du signal reçu dans le sous espace interférence. Bien choisir les modèles de signaux et d'interférence peut maximiser les performances du détecteur obtenu si les sous espaces engendrés sont orthogonaux. Ces détecteurs fonctionnent pour tester une coordonnée (x, y) de la scène considérée.

Si on généralise l'utilisation de ces détecteurs à toutes les coordonnées de la scène, on peut développer un processeur SAR basé sur ces nouveaux détecteurs, différents du processeur basé sur les détecteurs classiques présenté dans la section 1.3. Les processeurs SAR ainsi obtenus s'appuieront sur les hypothèses de rétrodiffusion de cible pour améliorer la détection. Ils rentrent dans la nouvelle catégorie d'algorithmes de formation d'image développée durant cette thèse : les processeurs SAR basés sur des détecteurs de sous espaces.

Chapitre 3

Processeurs SAR basés sur des détecteurs de sous espace

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'utiliser les détecteurs SES et SESI (cf. chapitre 2) afin de développer de nouveaux processeurs SAR (que l'on appellera respectivement algorithme SARSES et algorithme SARSESI). Dans une première partie, la mise en oeuvre des algorithmes SARSES et SARSESI est décrite. La principale difficulté liée à l'implémentation de ces deux algorithmes réside dans le calcul des bases des sous espaces. En considérant une matrice regroupant l'ensemble des réponses des modèles choisis quelque soit leur orientation, on effectue une Décomposition en Valeurs Singulières ou Singular Value Decomposition (SVD) de cette matrice grâce à laquelle on génère une base orthonormée (comme dans [15] ou [21]). Les deuxième et troisième parties, contributions très importante de ce travail de thèse, proposent plusieurs étapes d'optimisation des algorithmes entraînant une baisse substantielle du temps de calcul. Les SVD, des opérations très coûteuses en temps de calcul, s'effectuent sur des matrices de dimensions très importantes. De plus, la génération d'une nouvelle base est nécessaire pour chaque position (pixel) à imager. Laissés en l'état, nos deux algorithmes sont inutilisables sur données réelles. La deuxième partie propose donc deux méthodes de réduction du coût de calcul lié au calcul des bases des sous espaces, tout d'abord en compressant les matrices à décomposer, puis en réduisant le nombre de calcul de génération des bases à une seule SVD. La troisième partie présente des évolutions des algorithmes SARSES et SARSESI afin qu'ils opèrent sur des signaux compressés. Cette approche, comparable à celle utilisée par l'algorithme de Backprojection présentée en 1.2.2, réduit de façon significative la complexité des algorithmes. La dernière partie s'intéresse à la résolution des images obtenues par les nouveaux algorithmes.

3.1 Processeurs SAR non optimisés

On se propose dans cette partie d'exposer l'implémentation des algorithmes SARSES et SARSESI. Pour ce faire, il nous faut dans un premier temps déterminer les bases des sous espaces utilisés par les détecteurs SES et SESI. Celles-ci doivent contenir l'ensemble des signaux réfléchis par un modèle de cible ou d'interférence quelque soit l'orientation considérée. De telles bases peuvent être obtenues grâce aux SVD des matrices contenant l'ensemble des réponses du modèle pour toutes ses orientations, à une position donnée.

3.1.1 Construction de la base des sous espaces

Afin de calculer les différentes quantités tests des détecteurs SARSES et SARSESI trouvées dans les équations (2.8), (2.24), (2.40) et (2.60), il faut pouvoir déterminer les bases orthonormées \mathbf{H}_{xy} et \mathbf{J}_{xy} des sous espaces $\langle H_{xy} \rangle$ et $\langle J_{xy} \rangle$. Nous considérerons seulement la génération de \mathbf{H}_{xy} . La méthode pour générer \mathbf{J}_{xy} est rigoureusement identique.

3.1.1.1 Hypothèses

Pour décrire de façon efficace les signaux rétrodiffusés par la cible (ou l'interférence) à détecter, un sous espace doit considérer deux types de contraintes :

- Le modèle de diffusion (ou l'interférence) qui servira à engendrer le sous espace doit physiquement décrire la cible de façon pertinente.
- Le sous espace généré par ce modèle doit être de dimension suffisamment faible. Dans le cas contraire, le détecteur de sous espace risquerait d'augmenter le nombre de fausses alarmes autant que le nombre de "bonnes" détections.

Le modèle une fois trouvé permettra donc de générer la base du sous espace à détecter ; la seconde hypothèse devra être vérifiée une fois la base formée.

3.1.1.2 Critère et formation de la base

La base \mathbf{H}_{xy} est générée par l'ensemble des signaux :

$$\mathbf{y}(\alpha, \beta) = [\mathbf{y}_1(\alpha, \beta)^T \quad \mathbf{y}_2(\alpha, \beta)^T \quad \dots \quad \mathbf{y}_n(\alpha, \beta)^T]^T, \quad (3.1)$$

Où le signal $\mathbf{y}_i(\alpha, \beta)$, $i \in [1, n]$, est le signal rétrodiffusé par le modèle que l'on aura choisi, d'orientation (α, β) , reçu à la position u_i . Supposons que les angles (α, β) dans $[\alpha_{min}, \alpha_{max}] \times [\beta_{min}, \beta_{max}]$ sont échantillonnés sur une grille suffisamment fine. On obtient ainsi un ensemble de couples (α_k, β_l) couvrant $[\alpha_{min}, \alpha_{max}] \times [\beta_{min}, \beta_{max}]$, $(k, l) \in [1, P] \times [1, Q]$. Le choix du pas d'échantillonnage angulaire, dont dépendra la "qualité" de la description du sous espace, est discuté dans la partie 3.1.1.3. La base orthonormée \mathbf{H}_{xy} doit minimiser le critère $C(\mathbf{H}_{xy})$:

$$C(\mathbf{H}_{xy}) = \sum_{i,j} \|\mathbf{y}(\alpha_i, \beta_j)\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}(\alpha_i, \beta_j)\|^2 \quad (3.2)$$

Il est bien connu (voir [21] pour un exemple) que \mathbf{H}_{xy} est obtenu par SVD de la matrice \mathbf{S}_{xy} définie par :

$$\mathbf{S}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{y}(\alpha_P, \beta_Q) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{y}_1(\alpha_P, \beta_Q) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{y}_n(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{y}_n(\alpha_P, \beta_Q) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

On peut écrire que :

$$\mathbf{S}_{xy} = \mathbf{U}_{xy} \mathbf{\Sigma}_{xy} \mathbf{V}_{xy}^\dagger \quad (3.5)$$

Où \mathbf{U}_{xy} et \mathbf{V}_{xy} sont deux $(M \times \min(M, PQ))$ et $(\min(M, PQ) \times PQ)$ matrices unitaires et $\mathbf{\Sigma}_{xy}$ une matrice diagonale positive. \mathbf{H}_{xy} est formé des D_H vecteurs singuliers gauches de \mathbf{U}_{xy} correspondant aux D_H valeurs singulières non nulles de $\mathbf{\Sigma}_{xy}$. En pratique, beaucoup de valeurs singulières sont très petites et on garde seulement les D'_H plus significatives. Le sous espace résultant est connu comme étant le meilleur sous espace de dimension D'_H minimisant le critère $C(\mathbf{H}_{xy})$.

3.1.1.3 Détermination du pas d'échantillonnage angulaire pour le calcul de la base des sous espaces

Considérons une position (x_0, y_0) donnée. Pour générer la matrice $\mathbf{S}_{x_0 y_0}$, il est nécessaire d'échantillonner (α, β) (ou (γ, δ)) sur un intervalle I . Le choix d'un pas d'échantillonnage angulaire suffisamment petit est essentiel pour générer une base de sous espace proche de celle que l'on recherche théoriquement. On doit aussi le choisir suffisamment grand pour ne pas augmenter plus que nécessaire la charge de calcul en générant une matrice trop grande.

Supposons qu'au pas d'échantillonnage angulaire Δ_s , le nombre d'échantillons angulaires soit $P(\Delta_s)$. Soit δ le plus petit pas angulaire possible ($\delta < \Delta_s$), le nombre d'échantillons correspondant à ce pas est $P(\delta)$. Soit $\mathbf{S}_{x_0 y_0}(\Delta_s)$ et $\mathbf{S}_{x_0 y_0}(\delta)$ les matrices générées lorsque le pas d'échantillonnage angulaire est respectivement Δ_s et δ . Soit $\mathbf{H}(\Delta_s)$ le sous espace de dimension D résultant de la SVD de $\mathbf{S}_{x_0 y_0}(\Delta)$. L'erreur moyenne $\epsilon(\Delta_s)$ induite par le choix du pas d'échantillonnage Δ_s est définie par :

$$\epsilon(\Delta_s) = \frac{1}{P(\delta)^2} \|\mathbf{P}_{\mathbf{H}(\Delta_s)}^\perp \mathbf{S}_{x_0 y_0}(\delta)\|^2 \quad (3.6)$$

où $\mathbf{P}_{\mathbf{H}(\Delta_s)}^\perp$ est le projecteur dans le sous espace orthogonal à $\mathbf{H}(\Delta_s)$. Le calcul de $\epsilon(\Delta_s)$ permet de déterminer dans quelle mesure les vecteurs de $\mathbf{S}_{x_0 y_0}(\delta)$ sont entièrement contenus ou pas dans le sous espace $\mathbf{H}(\Delta_s)$. Cette erreur doit être comparée à l'erreur $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ induite par le choix de la dimension D du sous espace. Cette erreur est définie comme suit :

$$\epsilon_{ref}(\Delta_s) = \frac{1}{P(\Delta_s)^2} \|\mathbf{P}_{\mathbf{H}(\Delta_s)}^\perp \mathbf{S}_{x_0 y_0}(\Delta_s)\|^2. \quad (3.7)$$

Le pas angulaire Δ_s est jugé suffisamment fin si on a :

$$\epsilon(\Delta_s) \approx \epsilon_{ref}(\Delta_s). \quad (3.8)$$

Si la condition précédente est remplie, le choix du pas angulaire induit une erreur d'estimation de la base du sous espace du même ordre que celle induite par le choix de la dimension du sous espace : la "qualité" du sous espace généré ne changera pas.

3.1.1.4 Synthèse

En résumé, pour générer correctement une base du sous espace recherché, il faut :

- Choisir un modèle pertinent pour décrire la cible ou l'interférence.
- Effectuer une SVD de la matrice \mathbf{S}_{xy} (Eq. (3.4)).
- Choisir un rang de sous espace D'_H correspondant aux valeurs singulières les plus fortes.
- Vérifier que ce rang est "suffisamment faible".
- Vérifier que le pas d'échantillonnage angulaire, dans la construction de la matrice \mathbf{S}_{xy} , respecte le critère donné dans l'Eq. (3.8).

3.1.2 Implementation des processeurs d'image

Pour chaque point (x, y) à imager, on va considérer que l'intensité du pixel généré par les algorithmes SARSES et SARSESI correspond à la quantité test des détecteurs SES et SESI, dans les deux cas "variance du bruit connue" ou "inconnue". Chacun des pixels de l'image obtenue va correspondre au RVG de chacun des tests à deux hypothèses de ces deux détecteurs.

3.1.2.1 Processeur SAR basé sur des détecteurs de Sous Espace Signaux (SARSES)

Pour l'algorithme SARSES, on définit deux intensités calculées pour le pixel (x, y) : l'intensité $I_{SES_1}(x, y)$ correspondant à la quantité test du détecteur SARSES défini dans l'équation (2.8) lorsque la variance du bruit est connue et $I_{SES_2}(x, y)$ correspondant à la quantité test définie dans l'équation (2.24) lorsque la variance du bruit est inconnue. Si on pose $\mathbf{H}_{xy} \in \mathbb{C}^{M \times D_H}$ la base du sous espace cible $\langle H_{xy} \rangle$, \mathbf{z} le signal reçu et σ^2 la variance du bruit, on a :

$$I_{SES_1}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \quad (3.9)$$

$$I_{SES_2}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} \quad (3.10)$$

On peut résumer l'implémentation de l'algorithme SARSES dans le schéma donné dans la figure 3.1. Cet algorithme "en l'état" est inexploitable à cause des dimensions énormes des matrices \mathbf{S}_{xy} à décomposer et du nombre de SVD à effectuer.

3.1.2.2 Processeur SAR basé sur des détecteurs de Sous espace signaux et interférences

Pour l'algorithme SARSESI, comme précédemment pour l'algorithme SARSES, on définit deux intensités calculées pour le pixel (x, y) : l'intensité $I_{SESI_1}(x, y)$ correspondant à la quantité test du détecteur SARSESI défini dans l'équation (2.40) lorsque la variance du bruit est connue et $I_{SESI_2}(x, y)$ correspondant à la quantité test définie dans l'équation (2.60) lorsque la variance du bruit est inconnue. Si on pose $\mathbf{H}_{xy} \in \mathbb{C}^{M \times D_H}$ la base du sous espace cible $\langle H_{xy} \rangle$, $\mathbf{J}_{xy} \in \mathbb{C}^{M \times D_J}$ la base du sous espace cible $\langle J_{xy} \rangle$, \mathbf{z} le signal reçu et σ^2 la variance du bruit, on a :

$$I_{SESI_1}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \quad (3.11)$$

$$I_{SESI_2}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} \quad (3.12)$$

3.1. Processeurs SAR non optimisés

On peut résumer l'implémentation de l'algorithme SARSESI dans le schéma donné dans la figure 3.2. Comme le processeur SARSES et pour les même raisons, cet algorithme n'est pas exploitable tel quel.

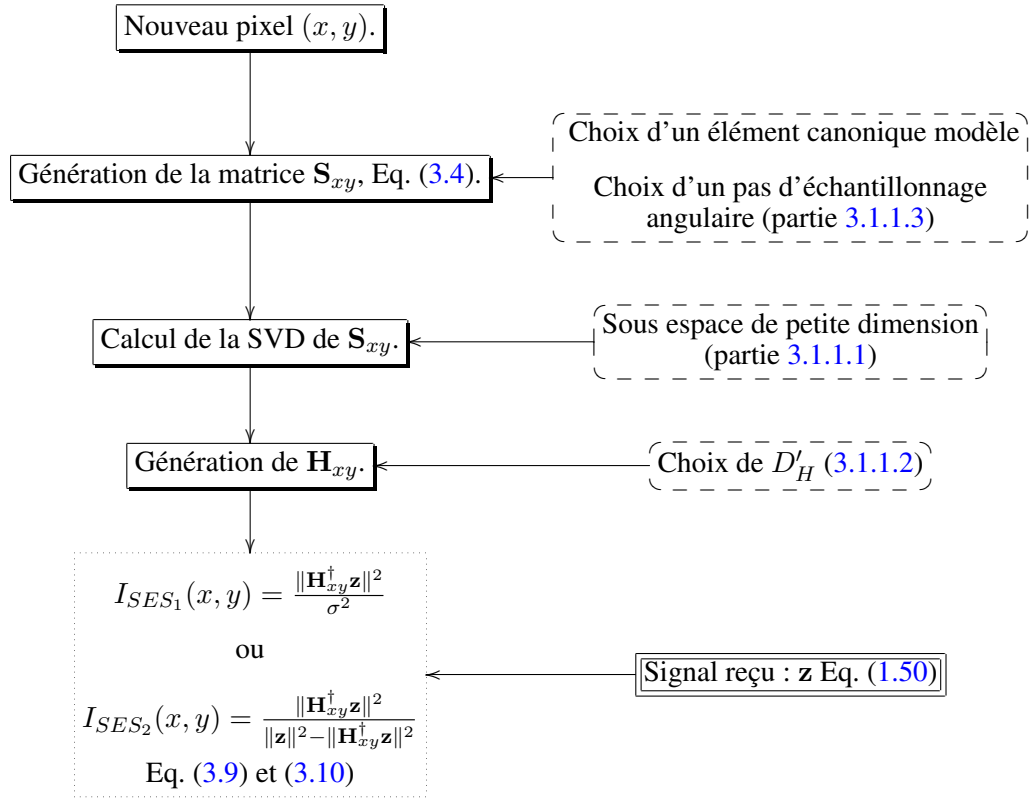


FIG. 3.1 – Schéma de l'algorithme SARSES

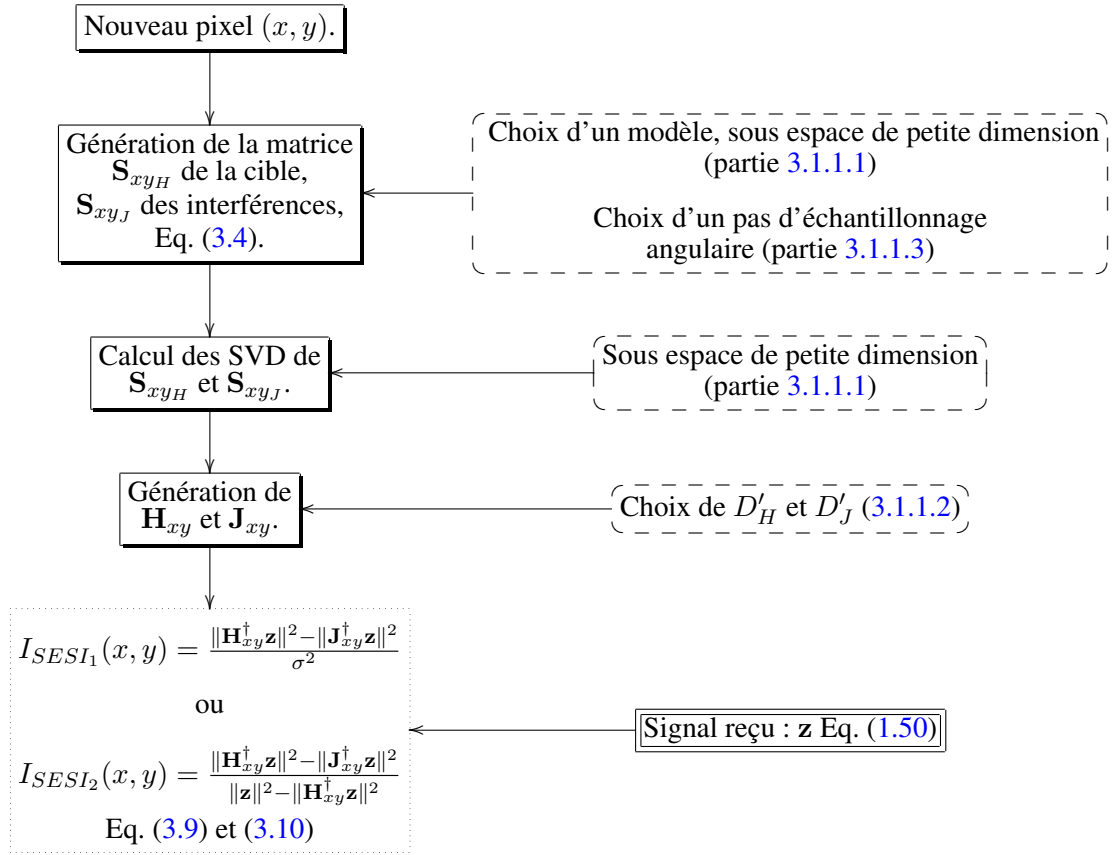


FIG. 3.2 – Schéma de l'algorithme SARSESI

3.2 Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux bruts

L'implémentation des algorithmes SARSES et SARSESI nécessite de calculer chaque base orthogonale \mathbf{H}_{xy} (ou/et \mathbf{J}_{xy}) correspondant à chaque pixel (x, y) à représenter. Cette nécessité pose deux problèmes majeurs, tous deux liés au temps de calcul : il est tout d'abord nécessaire de calculer des SVD matrices \mathbf{S}_{xy} de très grande dimension, mais aussi de répéter cette opération pour chaque pixel à imager. En l'état, nos deux algorithmes sont inapplicables sur des signaux SAR réalistes, il est donc indispensable d'optimiser ces phases de calculs. On se propose donc de résoudre ces deux problèmes en réduisant d'une part la taille de la matrice à décomposer et d'autre part en montrant qu'à partir d'une seule SVD, on peut générer l'ensemble des bases orthonormées \mathbf{H}_{xy} (ou \mathbf{J}_{xy}) pour tout (x, y) .

3.2.1 Notations

Cette partie est particulièrement riche en notations. Dans une souci de clarté, cette section présente donc à nouveau certaines des variables déjà utilisées et en introduit de nouvelles.

Soit $e(t)$ le signal de fréquence centrale f_0 , de largeur de bande B émis pendant une durée T_e , mis en bande de base et F_s la fréquence d'échantillonnage. Soit $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^{[T_e F_s] \times 1}$ le vecteur contenant les échantillons de $e(t)$. Posons \mathbf{E} le vecteur tel que :

$$\mathbf{E} = \text{TFD}[\mathbf{e}]. \quad (3.13)$$

Posons $\mathbf{c}_i(\alpha, \beta)$ le vecteur mis en bande de base contenant les coefficients de réflexion sur la bande de fréquence $[f_0 - \frac{B}{2}, f_0 + \frac{B}{2}]$, d'un modèle orienté suivant (α, β) sous l'incidence (θ_i, ϕ_i) . (θ_i, ϕ_i) sont les angles définissant l'incidence de l'onde émise quand l'antenne est située à une position $(0, u_i, h)$ (figure 3.3).

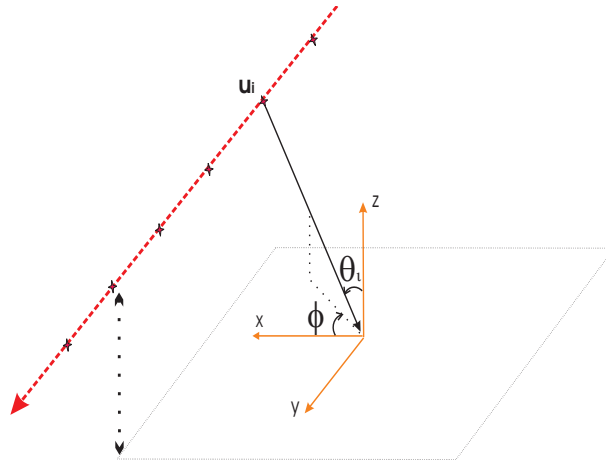


FIG. 3.3 – Angles d'incidence θ_i et ϕ_i .

Soit $\tau_i(x, y)$, le temps mis par le signal pour faire l'aller-retour entre une antenne positionnée en $(0, u_i, h)$ et un point positionné en $(x, y, 0)$. La distance séparant l'antenne et le point est donnée par R_i .

3.2. Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux bruts

Le vecteur $\mathbf{y}_i(\alpha, \beta)$, dont les composantes sont les échantillons du signal rétrodiffusé par un élément canonique placé en $(x, y, 0)$ orienté selon (α, β) , reçu par une antenne placée en $(0, u_i, h)$ pendant un temps T_r et mis en bande de base est donné dans l'annexe B par :

$$\mathbf{y}_i(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\lceil \tau_i(x,y)F_s \rceil}^T & \left[\text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_i(\alpha, \beta)] \frac{\exp -j2\pi f_0 \tau_i(x,y)}{R_i} \right]^T & \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_i(x,y)F_s \rceil}^T \end{bmatrix}^T \quad (3.14)$$

Pour les calculs qui vont suivre, on posera $\tau_i = \tau_i(x, y)$. Lorsque la distance entre l'antenne et le diffuseur est importante, on a $\forall i, R_i \approx R$ où R est une constante. R peut être factorisé dans l'équation (3.14). Comme c'est une constante, elle n'aura pas d'intérêt dans la suite des traitements à venir. On réécrit $\mathbf{y}_i(\alpha, \beta)$ comme suit :

$$\mathbf{y}_i(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\lceil \tau_i F_s \rceil}^T & \left[\text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_i(\alpha, \beta)] \exp -j2\pi f_0 \tau_i \right]^T & \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_i F_s \rceil}^T \end{bmatrix}^T \quad (3.15)$$

3.2.2 Optimisation des calculs de la base des sous espaces

Pour résoudre les problèmes de taille des matrices à décomposer et du nombre de SVD à calculer, on se focalise sur la modélisation de la matrice \mathbf{S}_{xy} donnée dans l'équation (3.4). D'après les équations (3.4) et (3.15) on a :

$$\mathbf{S}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\lceil \tau_1 F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0}_{\lceil \tau_1 F_s \rceil} \\ \text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_1(\alpha_1, \beta_1)]^T \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) & \dots & \text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_1(\alpha_P, \beta_Q)]^T \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \\ \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_1 F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_1 F_s \rceil} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{\lceil \tau_n F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0}_{\lceil \tau_n F_s \rceil} \\ \text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_n(\alpha_1, \beta_1)]^T \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) & \dots & \text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_n(\alpha_P, \beta_Q)]^T \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \\ \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_n F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_n F_s \rceil} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A partir de cette écriture de la matrice \mathbf{S}_{xy} , plusieurs opérations sont possibles et sont décrites dans les sections suivantes.

3.2.2.1 Suppression des zéros

Posons \mathbf{S}'_{xy} la matrice signal obtenue à partir de \mathbf{S}_{xy} (donnée dans l'équation (3.16)) en retirant les vecteurs de la forme $\mathbf{0}_n$:

$$\mathbf{S}'_{xy} = \begin{bmatrix} \text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_1(\alpha_1, \beta_1)] \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) & \dots & \text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_1(\alpha_P, \beta_Q)] \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_n(\alpha_1, \beta_1)] \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) & \dots & \text{TFD}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_n(\alpha_P, \beta_Q)] \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Sa décomposition en valeur singulière est :

$$\mathbf{S}'_{xy} = \mathbf{U}'_{xy} \mathbf{\Sigma}'_{xy} \mathbf{V}'_{xy}{}^\dagger. \quad (3.18)$$

avec \mathbf{U}'_{xy} :

$$\mathbf{U}'_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_{11} & \dots & \mathbf{u}'_{1(PQ)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{u}'_{n1} & \dots & \mathbf{u}'_{n(PQ)} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

où chaque vecteur colonne $\mathbf{u}'_{ij} \in \mathbb{C}^{\lceil T_e F_s \rceil \times 1}$ est de même dimension que le vecteur :

$$TFD^{-1}[\mathbf{E}\mathbf{c}_i(\alpha_k, \beta_l)]^T \exp(-j2\pi f_0 \tau_i) \quad (3.20)$$

défini en (3.17).

De simples manipulations matricielles montrent que \mathbf{S}_{xy} et \mathbf{S}'_{xy} partagent les mêmes valeurs singulières. Les vecteurs singuliers gauches de \mathbf{S}_{xy} sont évidemment générés à partir des vecteurs singuliers gauches de \mathbf{S}'_{xy} de la façon suivante :

$$\mathbf{U}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\lceil \tau_1 F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0}_{\lceil \tau_1 F_s \rceil} \\ \mathbf{u}'_{11} & \dots & \mathbf{u}'_{1(PQ)} \\ \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_1 F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_1 F_s \rceil} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{\lceil \tau_n F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0}_{\lceil \tau_n F_s \rceil} \\ \mathbf{u}'_{n1} & \dots & \mathbf{u}'_{n(PQ)} \\ \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_n F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_n F_s \rceil} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Pour conclure, on peut affirmer que pour obtenir une base \mathbf{H}_{xy} d'un sous espace $\langle H_{xy} \rangle$, le calcul de la SVD de \mathbf{S}'_{xy} et la détermination de sa base orthonormale correspondante \mathbf{H}'_{xy} sont suffisants. Cette simple diminution de taille de la matrice \mathbf{S}_{xy} permet déjà une baisse importante de la charge de calcul occasionnée par la SVD.

3.2.2.2 Calcul d'une seule décomposition en valeurs singulières

Imager une zone complète nécessite le calcul d'autant de SVD des matrices \mathbf{S}'_{xy} (voir (3.17)) qu'il y a de pixels (x, y) à représenter. Bien que la simplification précédente réduise de façon significative la taille des matrices à décomposer, elle reste importante et le nombre de SVD à effectuer rend l'application de l'algorithme très compliquée. Limiter le nombre de SVD à calculer est donc un enjeu crucial.

– Décomposition de la matrice signal :

Si nous analysons chaque vecteur $TFD^{-1}[\mathbf{E}\mathbf{c}_i(\alpha_k, \beta_l)]^T \exp(-j2\pi f_0 \tau_i)$ composant \mathbf{S}'_{xy} , on remarque que deux paramètres dépendent de la position (x, y) considérée. Le premier est le déphasage représenté par $\exp(-j2\pi f_0 \tau_i)$ où τ_i dépend de la distance entre l'antenne et le pixel considéré. Le second, le coefficient de réflexion $\mathbf{c}_i(\alpha_k, \beta_l)$, dépend de l'angle d'incidence de l'onde portant le signal et donc de (x, y) . D'après l'équation (3.17) :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'_{xy} &= \Phi_{xy} \mathbf{S}''_{xy} = \\ & \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \mathbf{I}_{\lceil T_e F_s \rceil} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \mathbf{I}_{\lceil T_e F_s \rceil} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} TFD^{-1}[\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_1(\alpha_1, \beta_1)]^T & \dots & TFD^{-1}[\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_1(\alpha_P, \beta_Q)]^T \\ \dots & \dots & \dots \\ TFD^{-1}[\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_n(\alpha_1, \beta_1)]^T & \dots & TFD^{-1}[\text{diag}(\mathbf{E})\mathbf{c}_n(\alpha_P, \beta_Q)]^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.2. Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux bruts

Φ_{xy} est une matrice unitaire de déphasages. Les matrices \mathbf{S}'_{xy} et \mathbf{S}''_{xy} partagent donc les mêmes valeurs singulières et les mêmes vecteurs singuliers droits. Les vecteurs singuliers gauches de \mathbf{S}'_{xy} sont obtenus en multipliant ceux de \mathbf{S}''_{xy} par Φ_{xy} . Soit $\mathbf{H}'_{xy} = \Phi_{xy} \mathbf{H}''_{xy}$.

– Calculer une seule SVD :

Le but dans cette partie est de montrer que \mathbf{S}''_{xy} possède les mêmes vecteurs singuliers gauches quelque soit (x, y) (et donc génère le même sous espace). Supposons que $\mathbf{H}''_{x_0 y_0}$, la base dérivant de la SVD de $\mathbf{S}''_{x_0 y_0}$ soit complètement déterminée, (x_0, y_0) étant les coordonnées d'un pixel donné. Le but ici est de montrer que l'on peut déterminer \mathbf{H}'_{xy} pour tout (x, y) à partir de $\mathbf{H}''_{x_0 y_0}$. En première approximation, on peut exprimer les angles d'incidence d'une onde émise d'une antenne placée en u_i vers un point (x, y) en fonction de ceux correspondant à une émise de u_i sur un point (x_0, y_0) :

$$\psi_i(x, y) \approx \psi_i(x_0, y_0) + \Delta_\psi \quad (3.23)$$

avec $\psi_i = \theta_i$ ou ϕ_i , les angles d'incidence définis dans la figure 3.3. L'indice i correspond à la position u_i de l'antenne. $\Delta_\psi = \Delta_\theta$ ou Δ_ϕ est une constante. Il est simple de montrer qu'en espace libre, changer l'incidence d'une onde sur un diffuseur orienté (α, β) est équivalent à opérer une rotation sur le diffuseur tout en gardant le même angle d'incidence. Comme nous l'avons dit précédemment, considérer deux points (x, y) et (x_0, y_0) du point de vu d'une même antenne placée en u_i revient à considérer deux angles d'incidence avec la relation donnée en (3.23). Du point de vu des matrices $\mathbf{S}''_{x_0 y_0}$ et \mathbf{S}''_{xy} , l'une peut donc être obtenue en permutant les colonnes de l'autre. De plus permuter les colonnes d'une matrice ne change pas la structure de sa SVD. On a donc :

$$\forall (x, y) \quad \mathbf{H}'_{xy} = \Phi_{xy} \mathbf{H}''_{x_0 y_0} \quad (3.24)$$

où $\mathbf{H}''_{x_0 y_0}$ est formé des D_H premiers vecteurs singuliers gauches de $\mathbf{S}''_{x_0 y_0}$.

La relation donnée en (3.23) n'est qu'une approximation et une relation plus exacte pour $\psi_i(x, y)$ est donnée par :

$$\psi_i(x, y) = \psi_i(x_0, y_0) + \Delta_\psi + \epsilon_i \quad (3.25)$$

où ϵ_i dépend de la position u_i de l'antenne. Cependant, en considérant le pire des cas $\epsilon_{max} = \max_{u_i} \epsilon_i$, cette erreur est négligeable si

$$\epsilon_{max} < \Delta_s, \quad (3.26)$$

où Δ_s est le pas angulaire choisi pour échantillonner (α, β) (une méthode pour déterminer Δ_s est décrite dans 3.1.1.3). La relation donnée dans l'équation 3.24 est donc toujours valide dans cette configuration. Ainsi, sous la condition (3.26), une seule SVD suffit pour générer l'ensemble des bases \mathbf{H}_{xy} nécessaire à la formation d'une image complète avec les algorithmes SARSES et SARSESI. Nous verrons par la suite que le critère (3.26) se trouve souvent vérifié dans des cas réalistes.

3.2.3 Implementation des processeurs d'image optimisés opérant sur signaux bruts

Les différentes phases d'optimisation des algorithmes SARSES et SARSESI permettent de réduire drastiquement la charge de calcul nécessaire à la formation d'une image et rendent l'utilisation de donnée réelles possible. Cependant, elles modifient l'architecture des algorithmes. Nous allons donc synthétiser l'implémentation de ces "nouveaux" algorithmes par des schémas.

L'implémentation des algorithmes SARSES et SARSESI optimisés opérant sur signaux bruts est résumée dans les schémas donnés figures 3.4 et 3.5. Ils reprennent et synthétisent les nouveaux algorithmes obtenus en intégrant les deux phases d'optimisation décrite dans les sections 3.2.2.1 et 3.2.2.2. On peut observer que les algorithmes proposés se décomposent en deux parties : une partie de prétraitement, contenant la plupart des opérations lourdes en temps de calcul, telle que la SVD et une autre correspondant à la formation de l'image à proprement parler, c'est à dire au calcul point par point de l'intensité du pixel. Ce découpage permet tout d'abord d'effectuer la formation d'image séparément du prétraitement et met en avant la réduction du nombre de calculs à effectuer comparé aux algorithmes SARSES et SARSESI non optimisés résumés dans les schémas figures 3.1 et 3.2.

Pour illustrer le gain en temps de calcul apporté par les deux optimisations précédentes, mettons nous dans la configuration suivante et concentrons nous sur le temps mis pour former l'ensemble des bases.

– **Paramètres de calcul de la base :**

- Modèle choisi : on choisit comme modèle d'élément canonique une plaque métallique de 1×2 m. On considérera que l'orientation de cette plaque varie dans $(\alpha, \beta) \in [0, 180] \times [0, 180]$ degrés.
- Pas d'échantillonnage angulaire : 10 degrés

– **Paramètres SAR :**

- Configuration de l'antenne synthétique : le vol est défini entre $u_1 = -50$ m et $u_{200} = 50$ m avec $\delta_u = 0.5$ m, à une altitude de 100 m.
- Signal émis : le signal émis est un chirp de fréquence centrale 400 MHz, de largeur de bande 100 MHz, polarisation verticale et de durée d'émission $T_e = 2.10^{-7}$ s.
- Temps de réception : $T_r = 20.10^{-7}$ s.
- Fréquence d'échantillonnage : $F_s = 200$ MHz.
- Configuration de la scène : on représentera la scène dans $x \in [90, 140]$ m et $y \in [-25, 20]$ m.
- Résolution de l'image : $\Delta_x = 1$ m et $\Delta_y = 1$ m.

Les calculs ont été effectués sur ordinateur doté d'un processeur de 2 GHz et de 2Go de RAM. Le programme de calcul des SVD est issu de la librairie *lapack*, codée en *fortran 90*. Les résultats correspondant aux temps de calculs de toutes les SVD nécessaires aux différents algorithmes sont résumés dans le tableau 3.1.

3.2. Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux bruts

	Sans Optimisation	Suppression des 0	Suppression des 0 + 1 SVD
Taille des matrices à décomposer (nombre d'éléments)	$80000 \times 36 = 2880000$	$8000 \times 36 = 288000$	$8000 \times 36 = 288000$
Nombre de SVD à effectuer	2250	2250	1
Temps de calcul d'une SVD	> 2 h.	1 min. 20 s.	1 min. 20 s.
Temps de calcul de toutes les SVD	> 188 j.	≈ 10 j. 10 h.	≈ 1 min. 20 s.

TAB. 3.1 – *Impact des optimisations sur les temps de calcul des SVD.*

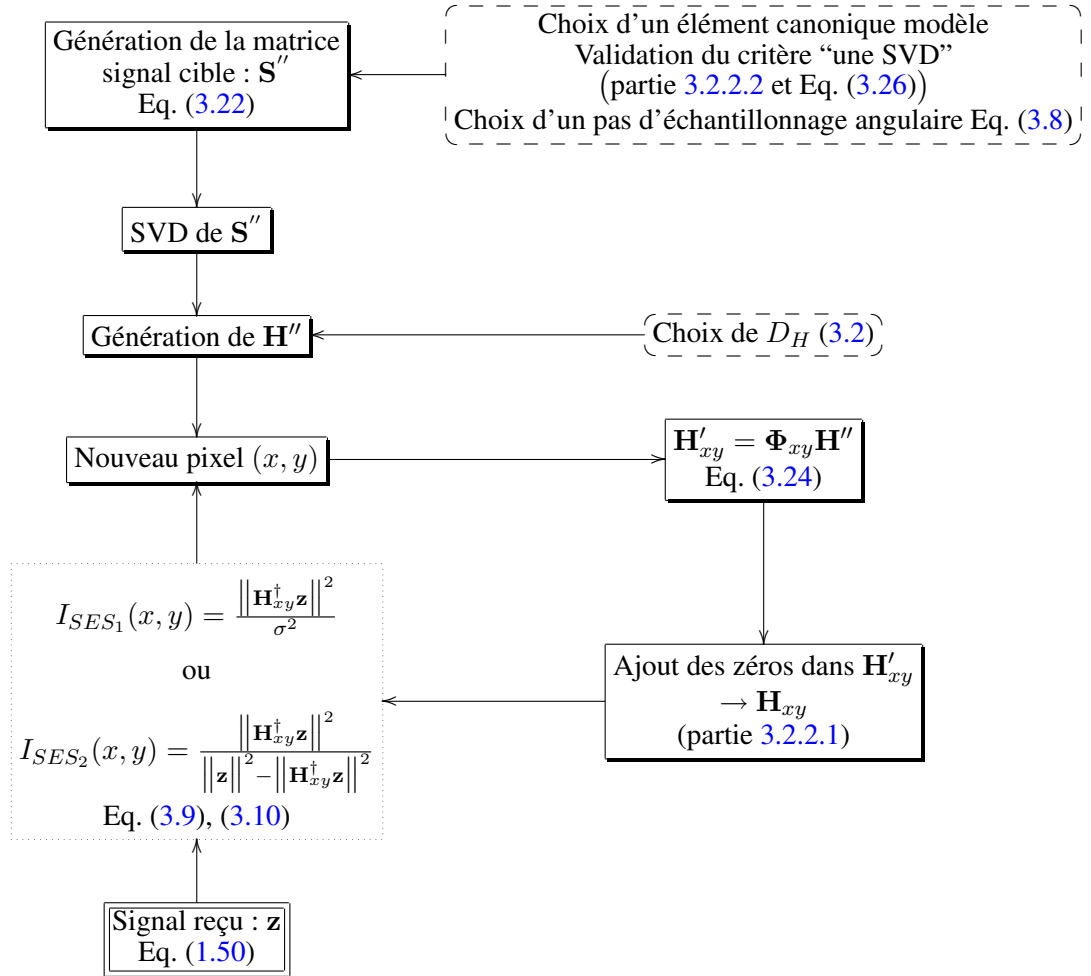


FIG. 3.4 – Schéma de l'algorithme SARSES optimisé, travail sur signaux bruts

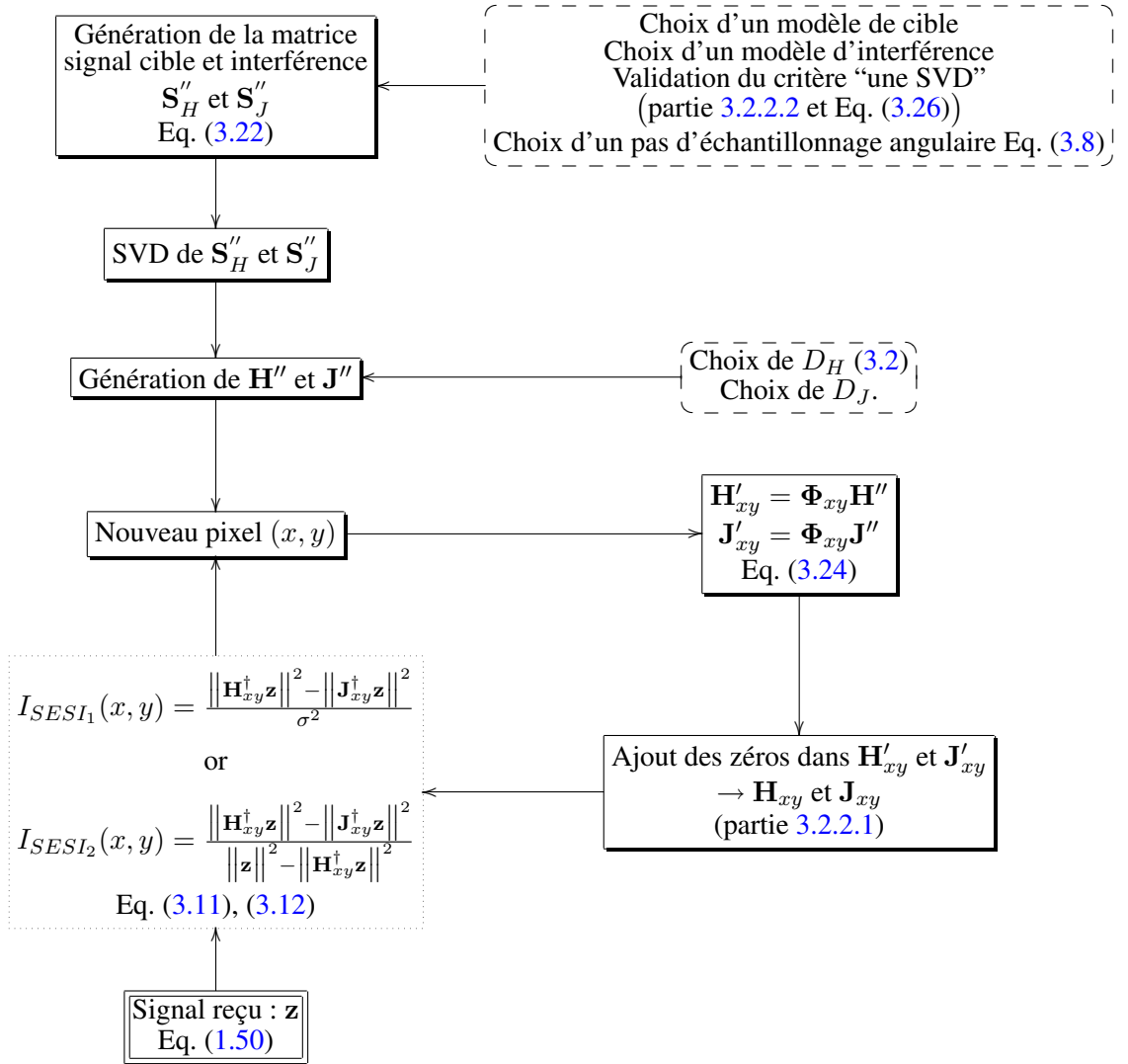


FIG. 3.5 – Schéma de l'algorithme SARSESI optimisé, travail sur signaux bruts

3.3 Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux compressés

Les algorithmes SARSES et SARSESI présentés précédemment synthétisent une image SAR en opérant directement sur le signal brut dont les échantillons sont contenus dans \mathbf{z} . Malgré les différentes solutions proposées pour optimiser le temps de calcul lié à la génération des bases des sous espaces, il peut être aussi très intéressant de réduire la complexité algorithmique liée au calcul de l'intensité de chaque pixel de l'image. Dans cette partie, nous développons de nouveaux algorithmes SARSES et SARSESI, basé sur le principe de l'algorithme de Backprojection présenté en 1.2.2, en gardant deux idées en tête :

- Les algorithmes doivent pouvoir fonctionner directement sur le signal compressé (c'est à dire après filtrage adapté du signal brut par le signal émis). Cette contrainte nous fut posée lors du traitement de certaines données réelles.
- Projeter le signal brut dans la base du sous espace d'un objet canonique revient à effectuer une série de filtrage du signal compressé par des filtres uniquement dépendant des coefficients de diffusion de l'objet canonique modèle.

L'algorithme ainsi obtenu, grâce à l'utilisation de produits de convolution, réduit la complexité de l'algorithme liée à la formation de l'image et nous permettra dans la partie suivante de traiter des données réelles.

3.3.1 Notations et hypothèses

On reprend les notations introduites dans la section 3.2.1. Certaines hypothèses sur le signal émis $e(t)$ doivent cependant être ajoutées. Soit $E(f)$ le spectre de ce signal. Le signal $e(t)$ est un signal de largeur de bande B et de fréquence centrale f_0 . On suppose que :

$$\begin{cases} |E(f)| = 1 \text{ (ou constant), si } f \in [f_0 - B/2, f_0 + B/2] \\ |E(f)| = 0, \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Soit $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^{\lceil F_s T_e \rceil}$ le vecteur contenant les échantillons du signal $e(t)$ ramené en bande de base et \mathbf{E} sa transformée de Fourier discrète.

On rappelle qu'un coefficient de diffusion $c_k(\alpha, \beta, f)$, à la fréquence f , correspondant à un diffuseur donné orienté suivant (α, β) , et on pose sans nuire à la généralité :

$$c_k(\alpha, \beta, f) = 0, \text{ si } f \notin [f_0 - B/2, f_0 + B/2]. \quad (3.28)$$

Soit $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta)$ le vecteur contenant les échantillons de $c_k(\alpha, \beta, f)$.

Notons \mathbf{S}_{xy}^f , la matrice des signaux fréquentiels définie comme suit :

$$\mathbf{S}_{xy}^f = \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{c}_1(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{c}_1(\alpha_P, \beta_Q) \\ \dots & \dots & \dots \\ \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{c}_n(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{c}_n(\alpha_P, \beta_Q) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Elle diffère de la matrice compressée \mathbf{S}'_{xy} , donnée dans l'équation (3.22), par le fait qu'on ne considère plus des signaux temporels, mais fréquentiels.

3.3.2 Reformulation du calcul de la base des sous espaces

Nous proposons de reformuler le calcul d'une base orthonormale \mathbf{H}_{xy} (ou \mathbf{J}_{xy}) du sous espace $\langle H_{xy} \rangle$ (ou $\langle J_{xy} \rangle$), défini en 3.1.1, en fonction du signal émis et des vecteurs d'une base indépendante de \mathbf{e} . La matrice \mathbf{S}_{xy}^f donnée dans (3.29) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\mathbf{S}_{xy}^f = \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{c}_1(\alpha_P, \beta_Q) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{c}_n(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{c}_n(\alpha_P, \beta_Q) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Posons \mathbf{C} la matrice des coefficients de réflexion $\mathbf{c}_i(\alpha_k, \beta_l)$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{c}_1(\alpha_P, \beta_Q) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{c}_n(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{c}_n(\alpha_P, \beta_Q) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

et $\langle H_C \rangle$ le sous espace contenant l'ensemble des vecteurs colonnes de \mathbf{C} . Considérons sa décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}_C \mathbf{\Sigma}_C \mathbf{V}_C^\dagger. \quad (3.32)$$

D'après les hypothèses posées dans (3.27) et (3.28), la démonstration proposée dans l'annexe C montre que la matrice

$$\begin{bmatrix} \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \end{bmatrix} \mathbf{U}_C \quad (3.33)$$

est orthonormale, on a donc que

$$\mathbf{S}_{xy}^f = \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \end{bmatrix} \mathbf{U}_C \mathbf{\Sigma}_C \mathbf{V}_C^\dagger \quad (3.34)$$

est la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{S}_{xy}^f .

La matrice $\mathbf{H}_C \in \mathbb{C}^{M \times D_C}$ formée par les D_C vecteurs singuliers gauches de \mathbf{U}_C associés aux valeurs singulières non nulles de $\mathbf{\Sigma}_C$, est une base orthonormale du sous espace $\langle H_C \rangle$. On récrit \mathbf{H}_C comme suit :

$$\mathbf{H}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}^c & \dots & \mathbf{h}_{1D_C}^c \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{h}_{n1}^c & \dots & \mathbf{h}_{nD_C}^c \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

avec $\mathbf{h}_{ij}^c \in \mathbb{C}^{[T_e F_s] \times 1}$. Il vient directement que la matrice \mathbf{H}_{xy}^f définie comme suit :

$$\mathbf{H}_{xy}^f = \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{h}_{11}^c & \dots & \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{h}_{1D_C}^c \\ \dots & \dots & \dots \\ \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{h}_{n1}^c & \dots & \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{h}_{nD_C}^c \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

est une base orthonormale du sous espace formé par l'ensemble des vecteurs colonnes de \mathbf{S}_{xy}^f . Les propriétés de linéarité de la transformée de Fourier discrète nous donnent que tout vecteur colonne de \mathbf{S}_{xy}' s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice orthonormale \mathbf{H}_{xy}' définie par :

$$\mathbf{H}_{xy}' = \begin{bmatrix} \text{TFD}^{-1}(\exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{h}_{11}^c) & \dots & \text{TFD}^{-1}(\exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{h}_{1D_C}^c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{TFD}^{-1}(\exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{h}_{n1}^c) & \dots & \text{TFD}^{-1}(\exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{h}_{nD_C}^c) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{H}_{xy}' = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{11}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) & \dots & \mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{1D_C}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{n1}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) & \dots & \mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{nD_C}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

On a donc, comme dans 3.2.2.1, \mathbf{H}_{xy} une base de $\langle H_{xy} \rangle$ avec :

$$\mathbf{H}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[\tau_1 F_s]} & \dots & \mathbf{0}_{[\tau_1 F_s]} \\ \mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{11}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) & \dots & \mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{1D_C}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_1) \\ \mathbf{0}_{[T_r F_s] - [T_e F_s] - [\tau_1 F_s]} & \dots & \mathbf{0}_{[T_r F_s] - [T_e F_s] - [\tau_1 F_s]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{[\tau_n F_s]} & \dots & \mathbf{0}_{[\tau_n F_s]} \\ \mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{n1}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) & \dots & \mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{nD_C}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_n) \\ \mathbf{0}_{[T_r F_s] - [T_e F_s] - [\tau_n F_s]} & \dots & \mathbf{0}_{[T_r F_s] - [T_e F_s] - [\tau_n F_s]} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Pour les mêmes raisons et sous le même critère que dans la section 3.2.2.2, une seule SVD est nécessaire pour calculer l'ensemble des bases des sous espace.

3.3.3 Calcul des quantités tests des détecteurs SAR à partir du signal compressé

Dans cette section, en utilisant les résultats trouvés dans la partie précédente, on veut calculer les quantités tests des détecteurs SAR donnés dans les équations (2.8)(2.24)(2.40) et (2.60) sans directement utiliser le signal \mathbf{z} mais les signaux compressés (après filtrage adapté) \mathbf{p}_k , $k \in [1, n]$:

$$\forall k \in [1, n], \mathbf{p}_k = \mathbf{z}_k \odot \hat{\mathbf{e}}^* \quad (3.40)$$

où $\hat{\mathbf{e}}$ est défini comme suit :

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{0}_{[F_s T_r] - [F_s T_e]} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

et $\hat{\mathbf{e}}^*$ est tel que :

$$\hat{\mathbf{e}}^* = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{e}})) \quad (3.42)$$

Les vecteurs $\mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^{[T_r F_s] \times 1}$ sont définis comme dans l'équation (1.50). Les expressions nécessaires au calcul des quantités (2.8)(2.24)(2.40) et (2.60) sont toutes de la forme (à quelques constantes près) $\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2$ ou $\|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2$ où $\mathbf{H}_{xy} \in \mathbb{C}^{M \times D_H}$ et $\mathbf{J}_{xy} \in \mathbb{C}^{M \times D_J}$ sont des bases orthonormales des sous espaces $\langle H_{xy} \rangle$ et $\langle J_{xy} \rangle$ définis en 3.1.1. On se concentre sur le calcul de $\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2$, la démarche étant identique pour $\|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2$.

Posons :

3.3. Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux compressés

$$\mathbf{H}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{h}_{D_H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \dots & \mathbf{h}_{1D_H} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{h}_{n1} & \dots & \mathbf{h}_{nD_H} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

avec $\mathbf{h}_i \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ et $\mathbf{h}_{ij} \in \mathbb{C}^{\lceil T_e F_s \rceil \times 1}$. On a :

$$\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=1}^{D_H} |\mathbf{h}_i^\dagger \mathbf{z}|^2 \quad (3.44)$$

$$= \sum_{i=1}^{D_H} \sum_{j=1}^n |\mathbf{h}_{ji}^\dagger \mathbf{z}_j|^2 \quad (3.45)$$

$$(3.46)$$

D'après l'équation (3.39), on peut poser :

$$\forall(i, j), \mathbf{h}_{ji} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\lceil F_s \tau_j \rceil}^T & \left(\mathbf{e} \odot \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{ji}^c) \exp(-j2\pi f_0 \tau_j) \right)^T & \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau_j F_s \rceil}^T \end{bmatrix}^T \quad (3.47)$$

Notons :

$$\hat{\mathbf{h}}_{ji}^c = \begin{bmatrix} \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{ji}^c) \\ \mathbf{0}_{\lceil F_s T_r \rceil - \lceil F_s T_e \rceil} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

et $\hat{\mathbf{h}}_{ji}^c \in \mathbb{C}^{\lceil F_s T_r \rceil}$ le vecteur tel que :

$$\hat{\mathbf{h}}_{ji}^{c*} = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{h}}_{ji}^c)). \quad (3.49)$$

En posant :

$$\mathbf{t}_{ji} = \hat{\mathbf{h}}_{ji}^{c*} \odot \mathbf{p}_j \quad (3.50)$$

où $\mathbf{t}_{ji} \in \mathbb{C}^{\lceil T_r F_s \rceil}$ et chacun des éléments de \mathbf{t}_{ji} est de la forme $t_{ji}(k)$, l'annexe D montre que si \mathbf{z}_j ou $\hat{\mathbf{h}}_{ji}^c$ contiennent suffisamment de 0 au début ou à la fin, on peut récrire le produit $\mathbf{h}_{ji}^\dagger \mathbf{z}_j$ à partir d'une convolution cyclique. On a pour tout (i, j) :

$$\mathbf{h}_{ji}^\dagger \mathbf{z}_j = t_{ji}(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j). \quad (3.51)$$

En reprenant l'équation (3.46), on obtient :

$$\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=1}^{D_H} \sum_{j=1}^n \left| t_{ji}(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2 \quad (3.52)$$

On peut donc bien calculer $\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2$ à partir du signal compressé et d'une base d'un sous espace. Si on reprend les algorithmes SAR un par un, voilà ce que nous obtenons :

– Algorithme SARSES avec variance connue :

D'après l'équation (3.9), l'intensité d'un pixel (x, y) donnée par l'algorithme SARSES avec variance connue est :

$$I_{SES_1}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \quad (3.53)$$

Avec \mathbf{H}_{xy} base orthonormale du sous espace signal. On a donc, en reprenant les notations précédentes et l'équation (3.52) :

$$I_{SES_1}(x, y) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{D_H} \sum_{j=1}^n \left| t_{ji}(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2 \quad (3.54)$$

– **Algorithme SARSES avec variance inconnue :**

D'après l'équation (3.10), l'intensité d'un pixel (x, y) donnée par l'algorithme SARSES avec variance inconnue est :

$$I_{SES_2}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} \quad (3.55)$$

En remarquant que :

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_j\|^2}{n\|\mathbf{e}\|^2} \quad (3.56)$$

et d'après l'équation (3.52), on en déduit que :

$$I_{SES_2}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{D_H} \sum_{j=1}^n \left| t_{ji}(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2}{\sum_{j=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_j\|^2}{n\|\mathbf{e}\|^2} - \sum_{i=1}^{D_H} \sum_{j=1}^n \left| t_{ji}(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2} \quad (3.57)$$

– **Algorithme SARSESI avec variance du bruit connue :**

D'après l'équation (3.11), l'intensité d'un pixel (x, y) donnée par l'algorithme SARSESI avec variance connue est :

$$I_{SESI_1}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \quad (3.58)$$

avec \mathbf{J}_{xy} base orthonormale du sous espace interférent $\langle J_{xy} \rangle$ de dimension D_J . Considérons \mathbf{C}_H la matrice des coefficients de réflexion du modèle de cible choisi et \mathbf{C}_J celle des coefficients de réflexion du modèle d'interférence. Ces deux matrices sont construites sur le modèle de (3.31). Soit \mathbf{H}_{C_H} et \mathbf{H}_{C_J} les deux sous espaces engendrés par \mathbf{C}_H et \mathbf{C}_J comme dans (3.35). On pose :

$$\mathbf{H}_{C_H} = [\mathbf{h}_{ij}^{cH}]_{(i,j) \in [1,n] \times [1,D_H]} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{H}_{C_J} = [\mathbf{h}_{ij}^{cJ}]_{(i,j) \in [1,n] \times [1,D_J]} \quad (3.60)$$

Avec $\mathbf{h}^{cH}_{ij} \in \mathbb{C}^{[F_s T_e] \times 1}$ et $\mathbf{h}^{cJ}_{ij} \in \mathbb{C}^{[F_s T_e] \times 1}$. En posant :

$$\hat{\mathbf{h}}_{ji}^{cH} = \begin{bmatrix} \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{ji}^{cH}) \\ \mathbf{0}_{[F_s T_r] - [F_s T_e]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{h}}_{ji}^{cJ} = \begin{bmatrix} \text{TFD}^{-1}(\mathbf{h}_{ji}^{cJ}) \\ \mathbf{0}_{[F_s T_r] - [F_s T_e]} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

3.3. Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux compressés

et

$$\hat{\underline{\mathbf{h}}}_{ji}^{c_H *} = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{h}}_{ji}^{c_H})) \quad (3.62)$$

$$\hat{\underline{\mathbf{h}}}_{ji}^{c_J *} = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{h}}_{ji}^{c_J})) \quad (3.63)$$

On pose

$$\mathbf{t}_{ji}^{\mathbf{H}} = \hat{\underline{\mathbf{h}}}_{ji}^{c_H *} \odot \mathbf{p}_j \quad (3.64)$$

$$\mathbf{t}_{ji}^{\mathbf{J}} = \hat{\underline{\mathbf{h}}}_{ji}^{c_J *} \odot \mathbf{p}_j \quad (3.65)$$

On obtient d'après (3.52) :

$$I_{SESI_1}(x, y) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^{D_H} \left| t_{ji}^H(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2 - \sum_{i=1}^{D_J} \left| t_{ji}^J(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2 \right] \quad (3.66)$$

– **Algorithme SARSESI avec variance du bruit inconnue :**

D'après l'équation (3.12), l'intensité d'un pixel (x, y) donnée par l'algorithme SARSESI avec variance inconnue est :

$$I_{SESI_2}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{z}\|^2} \quad (3.67)$$

En reprenant les notations précédentes, on obtient :

$$I_{SESI_2}(x, y) = \frac{\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^{D_H} \left| t_{ji}^H(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2 - \sum_{i=1}^{D_J} \left| t_{ji}^J(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2 \right]}{\sum_{j=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_j\|^2}{n\|\mathbf{e}\|^2} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{D_H} \left| t_{ji}^H(\lceil \tau_j F_s \rceil) \exp(j2\pi f_0 \tau_j) \right|^2} \quad (3.68)$$

3.3.4 Implémentation des processeurs opérant sur signaux compressés

Les algorithmes SARSES et SARSESI optimisés opérant sur signaux compressés sont décrits dans les schémas figures 3.6 et 3.7. Ils sont inspirés des optimisations précédentes et permettent surtout de générer une image SAR directement à partir des signaux compressés. Cette approche a plusieurs avantages. Tout d'abord en terme de gain de temps calcul : elle est algorithmiquement mieux optimisée que les algorithmes SARSES travaillant sur signaux bruts : les convolutions effectuées en prétraitement permettent de baisser la complexité algorithmique d'un ordre. Il arrive ensuite que l'on doive traiter des données déjà compressées et que l'on ne connaisse pas la forme d'onde utilisée pour différentes raisons. Cette approche permet de se passer de la connaissance de la forme d'onde (mis à part son énergie qui est nécessaire pour les algorithmes considérant des variances de bruit inconnues) pour pouvoir générer une image.

Il existe le même type de différence entre les algorithmes travaillant sur données brutes et les algorithmes travaillant sur données compressées qu'entre l'algorithme TDCA vu en 1.2.1 et l'algorithme de Back-projection vu en 1.2.2.

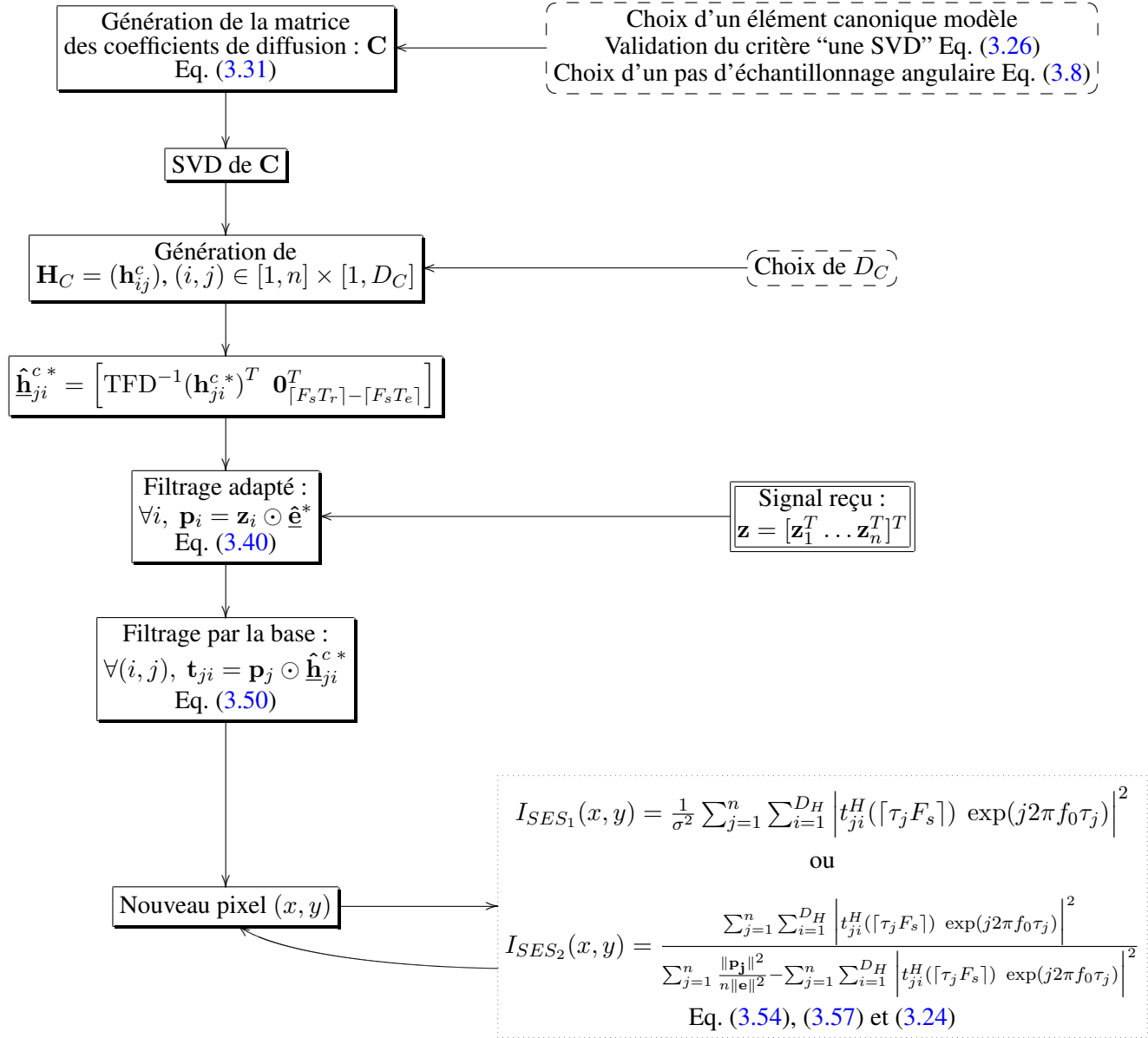


FIG. 3.6 – Schéma de l'algorithme SARSES optimisé, travail sur signaux compressés.

3.3. Processeurs SAR optimisés opérant sur des signaux compressés

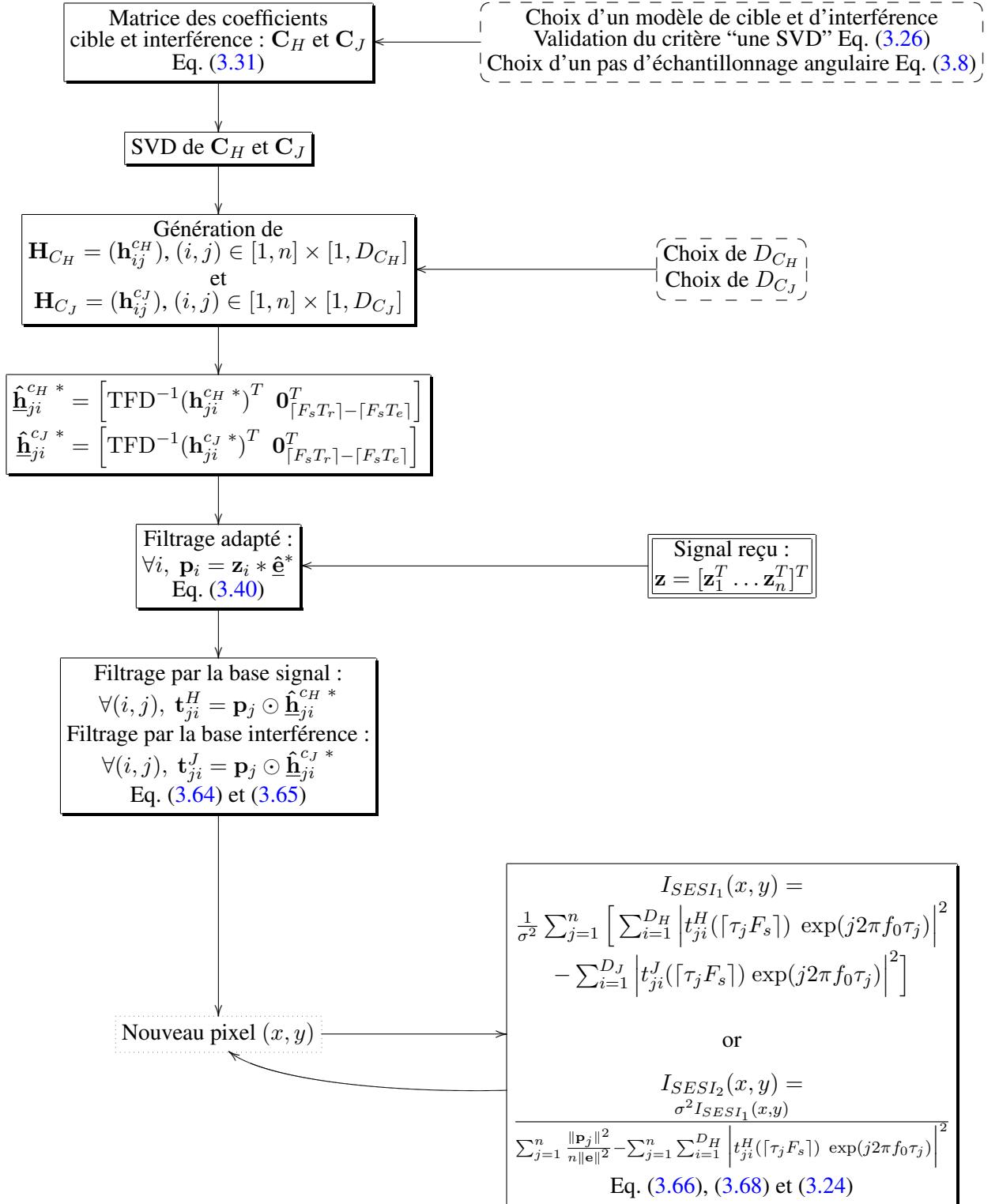


FIG. 3.7 – Schéma de l'algorithme SARSESI optimisé, travail sur signaux compressés.

3.4 Résolution des images obtenues

La résolution des images générées par les algorithmes SAR, c'est à dire la capacité de l'algorithme à séparer deux sources issues du même sous espace signal, est un point important à déterminer. Il se peut en effet que les résolutions valables pour les algorithmes SAR classiques utilisant le modèle du point isotrope (cf. partie 1.2.4) ne soient pas identiques lorsqu'on utilise un algorithme SARSES ou SARSESI basé sur un autre modèle. On doit donc définir des fonctions d'ambiguïtés, en (x, y) ou en distance-azimut, propres à chaque algorithme. En les traçant, on obtient une représentation précise de la taille des lobes principaux et secondaires des images formées.

3.4.1 Processeurs basés sur des détecteurs SAR de sous espaces signaux

3.4.1.1 Fonction d'ambiguïté, version variance du bruit connue

Soit $\mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)$ le signal rétrodiffusé par l'élément canonique servant de modèle de cible à la position (x_0, y_0) , avec une orientation définie par (α, β) . Soit \mathbf{H}_{xy} une base orthonormée du modèle choisi à la position (x, y) . On définit une première fonction d'ambiguïté pour l'algorithme SARSES (version variance du bruit connue) :

$$\rho_{S_1}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2}{\sigma^2} \quad (3.69)$$

Soit $\mathbf{U}_{x_0 y_0} \mathbf{\Sigma}_{x_0 y_0} \mathbf{V}_{x_0 y_0}^\dagger$ la SVD de $\mathbf{S}_{x_0 y_0}$ définie comme dans (3.4) avec les vecteurs $\mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)$. Les angles (α, β) sont inconnus, on se doit donc de définir une nouvelle fonction d'ambiguïté, $\hat{\rho}_{S_1}(x, y)$, moyennant $\rho_{S_1}(x, y)$ sur $(\alpha, \beta) \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \times [\beta_{min}, \beta_{max}]$:

$$\hat{\rho}_{S_1}(x, y) = \frac{1}{PQ} \sum_{l,p} \left[\frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2}{\sigma^2} \right] \quad (3.70)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \text{tr} \left(\mathbf{H}_{xy}^\dagger \frac{1}{PQ} \sum_{l,p} \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p) \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)^\dagger \mathbf{H}_{xy} \right) \quad (3.71)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \text{tr} \left(\mathbf{H}_{xy}^\dagger \frac{1}{PQ} \mathbf{U}_{x_0 y_0} \mathbf{\Sigma}_{x_0 y_0}^2 \mathbf{U}_{x_0 y_0}^\dagger \mathbf{H}_{xy} \right) \quad (3.72)$$

$$= \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{U}_{x_0 y_0} \mathbf{\Sigma}_{x_0 y_0}\|_F^2}{\sigma^2 PQ} \quad (3.73)$$

Où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius. Cette fonction d'ambiguïté donne une résolution moyenne en distance et azimut des images obtenues avec l'algorithme SARSES (version variance du bruit connue).

3.4.1.2 Fonction d'ambiguïté, version variance du bruit inconnue

En reprenant les variables données précédemment, on définit notre fonction d'ambiguïté comme la moyenne sur (α, β) de la fonction :

$$\rho_{S_2}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2}{\|\mathbf{y}(\alpha, \beta)\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2} \quad (3.74)$$

Notre fonction d'ambiguïté $\hat{\rho}_{S_2}(x, y)$ est donc définie par :

$$\hat{\rho}_{S_2}(x, y) = E_{\alpha, \beta} \left[\frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2}{\|\mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2} \right] \quad (3.75)$$

$$= \frac{1}{PQ} \sum_{l, p} \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2}{\|\mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2} \quad (3.76)$$

3.4.2 Processeurs basés sur des détecteurs SAR de sous espaces signaux ou interférences

3.4.2.1 Fonction d'ambiguïté, version variance du bruit connue

On reprend les notations de 3.4.1. Posons \mathbf{J}_{xy} la base orthonormale en (x, y) du sous espace des interférences. On définit notre fonction d'ambiguïté comme la moyenne sur (α, β) de la fonction :

$$\rho_{SI_1}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2}{\sigma^2} \quad (3.77)$$

On a donc :

$$\hat{\rho}_{SI_1}(x, y) = \frac{1}{PQ} \sum_{l, p} \left[\frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2}{\sigma^2} \right] \quad (3.78)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \text{tr} \left(\mathbf{H}_{xy}^\dagger \frac{1}{PQ} \sum_{l, p} \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p) \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)^\dagger \mathbf{H}_{xy} \right) \quad (3.79)$$

$$- \frac{1}{\sigma^2} \text{tr} \left(\mathbf{J}_{xy}^\dagger \frac{1}{PQ} \sum_{\alpha_l, \beta_p} \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p) \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)^\dagger \mathbf{J}_{xy} \right) \quad (3.80)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \text{tr} \left(\mathbf{H}_{xy}^\dagger \frac{1}{PQ} \mathbf{U}_{x_0 y_0} \Sigma_{x_0 y_0}^2 \mathbf{U}_{x_0 y_0}^\dagger \mathbf{H}_{xy} \right) \quad (3.81)$$

$$- \frac{1}{\sigma^2} \text{tr} \left(\mathbf{J}_{xy}^\dagger \frac{1}{PQ} \mathbf{U}_{x_0 y_0} \Sigma_{x_0 y_0}^2 \mathbf{U}_{x_0 y_0}^\dagger \mathbf{J}_{xy} \right) \quad (3.82)$$

$$= \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{U}_{x_0 y_0} \Sigma_{x_0 y_0}\|_F^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{U}_{x_0 y_0} \Sigma_{x_0 y_0}\|_F^2}{\sigma^2 PQ} \quad (3.83)$$

3.4.2.2 Fonction d'ambiguïté, version variance du bruit inconnue

En reprenant les variables données précédemment, on définit notre fonction d'ambiguïté comme la moyenne sur (α, β) de la fonction :

$$\rho_{SI_2}(x, y) = \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2}{\|\mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2} \quad (3.84)$$

Notre fonction d'ambiguïté $\hat{\rho}_{S_2}(x, y)$ est donc défini par :

$$\hat{\rho}_{SI_2}(x, y) = E_{\alpha, \beta} \left[\frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2}{\|\mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha, \beta)\|^2} \right] \quad (3.85)$$

$$= \frac{1}{PQ} \sum_{l, p} \frac{\|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2 - \|\mathbf{J}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2}{\|\mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2 - \|\mathbf{H}_{xy}^\dagger \mathbf{y}_{x_0 y_0}(\alpha_l, \beta_p)\|^2} \quad (3.86)$$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini de nouveaux algorithmes de formation d'images SAR basés sur des détecteurs de sous espace. Trois points prépondérants y sont présentés, tous basés sur l'analyse numérique du problème : la formation de bases de sous espaces signal ou interférence, l'optimisation du temps de calcul des algorithmes passant principalement par une optimisation du temps de calcul lié à la détermination de la base et enfin le calcul de la résolution des images finalement obtenues. Ces trois phases indispensables nécessitent, pour un bon fonctionnement des algorithmes, de répondre à des critères propres à la configuration SAR envisagée et aux modèles retenus. La partie suivante montre des applications de ces algorithmes en situation réaliste. Les performances des algorithmes sont comparées et analysées, spécialement dans le cas de la détection de cibles manufacturées sous couvert forestier en bande P.

Chapitre 4

Application à la détection de cibles manufacturées en bande P

Dans ce chapitre, nous mettons en oeuvre, analysons et comparons les performances des algorithmes SARSES et SARSESI pour plusieurs configurations de détection de cibles manufacturées. On suppose qu’une cible manufacturée peut être vue, en bande P (≈ 400 MHz, longueur d’onde d’environ 0.75 m), comme un ensemble de plaques métalliques d’orientations inconnues. Une première partie est donc dédiée à l’étude de l’algorithme SARSES utilisant un détecteur de “sous espace de plaques”. Nous étudions la validité du modèle choisi, des différents critères de bon fonctionnement de l’algorithme et les performances de détection d’une cible manufacturée dans du bruit blanc Gaussien et dans une forêt (simulation et données réelles). La deuxième section est dédiée à l’utilisation de l’algorithme SARSESI et son apport à la détection de cible dans la forêt. A basse fréquence, l’apparition de fausses alarmes est souvent due aux troncs qui composent les arbres (cf. [22]), que l’on modélise comme des cylindres diélectriques d’inclinaison inconnue. Le sous espace interférant utilisé par l’algorithme SARSESI sera donc un “sous espace de cylindres”. On étudie là aussi les performances de l’algorithme sur données simulées et réelles.

Remarque : Dès que l’on utilisera l’algorithme SARSES ou SARSESI version “variance de bruit connue” pour imager une scène, comme on suppose que la variance du bruit σ^2 est la même quelque soit la position du pixel à imager, on la fixera à 1 dans les calculs (ce ne sera bien sûr pas le cas lorsque l’on calculera les performances de détection dans du bruit blanc Gaussien).

4.1 Performances de l'algorithme SARSES en bande P

Cette section présente des applications de l'algorithme SARSES lorsque le modèle d'élément canonique choisi pour générer les détecteurs de sous espace est une plaque. L'étude de l'algorithme se fera en trois parties, s'appuyant sur les chapitres précédents. On déroule tout d'abord les étapes de validation nécessaires au bon fonctionnement de l'algorithme. On se familiarise ensuite avec le type d'image obtenu grâce à l'algorithme. On évalue enfin le gain en performance de détection de l'algorithme lors de simulations ou d'essais sur données réelles.

4.1.1 Hypothèses sur la réponse des cibles manufacturées en bande P

En suivant l'exemple de la décomposition de cibles en plaques donnée dans [23], on choisit de considérer qu'une cible manufacturée est un ensemble de plaques métalliques d'orientations inconnues. Ce modèle a un certain nombre d'avantages :

- La matrice de diffusion est facile à implémenter, grâce à des codes basés sur l'approximation de l'optique physique (que l'on peut trouver notamment dans [24]).
- La directivité du diagramme de rayonnement d'une plaque (illustration figure 4.1) est une propriété intéressante que l'on retrouve chez beaucoup de cibles manufacturées (propriété exploitée dans [14]).
- Cette forme est très rare dans des environnements naturels comme les forêts.

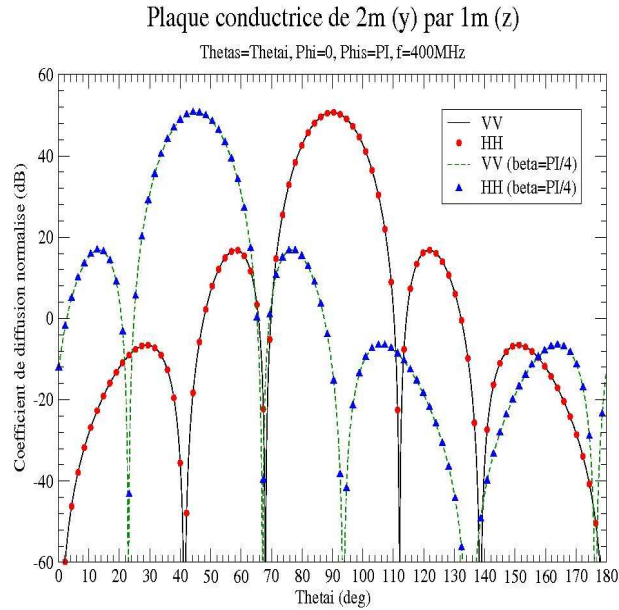


FIG. 4.1 – Diagramme de diffusion normalisé en fonction de l'incidence pour deux plaques de 1×2 m, d'orientations différentes, à 400 MHz.

4.1.2 Validation des critères de fonctionnement

Pour fonctionner correctement, l'algorithme doit valider deux critères principaux : le pas d'échantillonnage angulaire de la matrice S'' , définie en (3.22), doit être "suffisamment fin" et le sous espace

du modèle utilisé doit être de petite dimension. Les configurations de la scène et de l'algorithme sont données ci-dessous.

4.1.2.1 Paramètres de simulation

– Paramètres de calcul de la base :

- Modèle choisi : on choisit comme modèle d'élément canonique une plaque métallique de 1×2 m. On considérera que l'orientation de cette plaque varie dans $(\alpha, \beta) \in [0, 180] \times [0, 180]$ degrés.
- Code de calcul : le code pour calculer la matrice de rétrodiffusion de la plaque sera un code basé sur l'approximation de l'optique physique [24].

– Paramètres SAR :

- Configuration de l'antenne synthétique : le vol est défini entre $u_1 = -50$ m et $u_{200} = 50$ m avec $\delta_u = 0.5$ m, à une altitude de 100 m.
- Signal émis : le signal émis est un chirp de fréquence centrale 400 MHz, de largeur de bande 100 MHz, polarisation verticale et de durée d'émission $T_e = 2.10^{-7}$ s.
- Configuration de la scène : on représentera toujours la scène simulée telle que $x \in [90, 140]$ m et $y \in [-25, 20]$ m. Elle pourra cependant être plus petite.
- Position de la cible : la cible est située aux coordonnées (115, 0, 0). La distance radar-cible permet de considérer que nous sommes en champ lointain. ($> 2d^2/\lambda \approx 0.5$ m où d est la dimension maximale de l'antenne et λ est la longueur d'onde).

4.1.2.2 Validation du critère “sous espace de faible dimension”

Afin d'appliquer l'algorithme SARSES, il faut que l'élément canonique modèle génère un sous espace de petite dimension. La figure 4.2 représente les valeurs singulières de la matrice de signaux S'' , définie en (3.22), pour différentes tailles de plaques métalliques.

Pour chacune des configurations présentées dans la figure 4.2, on peut clairement considérer que chacun des sous espace engendrés par les différentes plaques est de petite dimension. On remarque que la taille du sous espace dépend de la taille de la plaque : généralement, plus la plaque est de taille importante, plus le sous espace est de grande dimension.

4.1.2.3 Choix d'un pas d'échantillonnage angulaire

Afin de réduire la charge de calcul due à la SVD de la matrice S'' , définie en (3.22), il est nécessaire de choisir judicieusement le pas d'échantillonnage angulaire. Celui-ci doit en effet être le plus grand possible, tout en respectant le critère donné en (3.8). Soit δ le plus petit pas angulaire possible (c'est à dire générant une matrice de taille acceptable par le calculateur). Posons Δ_s le plus grand pas angulaire possible respectant le critère (3.8). L'erreur due au choix du pas angulaire $\epsilon(\Delta_s)$ et l'erreur due au choix de la dimension du sous espace $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ doivent être telles que :

$$\epsilon(\Delta_s) \approx \epsilon_{ref}(\Delta_s). \quad (4.1)$$

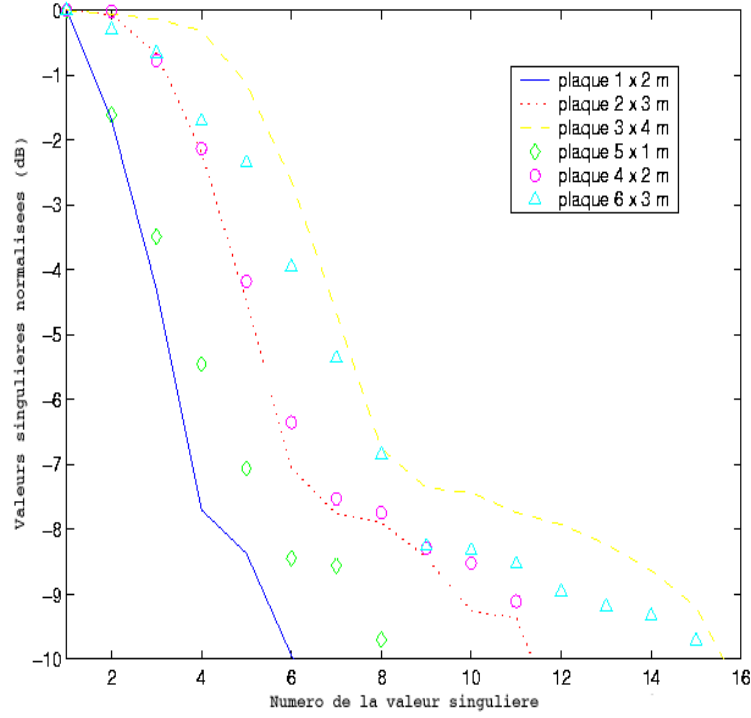


FIG. 4.2 – Valeurs singulières normalisées pour différentes tailles de plaques.

où

$$\epsilon(\Delta_s) = \frac{1}{P(\delta)^2} \|\mathbf{P}_{\mathbf{H}''}(\Delta_s)^\perp \mathbf{S}''(\delta)\|^2 \quad (4.2)$$

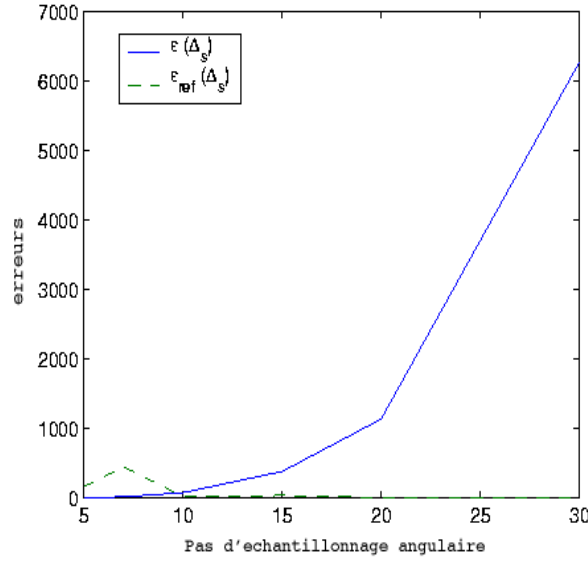
et

$$\epsilon_{ref}(\Delta_s) = \frac{1}{P(\Delta_s)^2} \|\mathbf{P}_{\mathbf{H}''}(\Delta_s)^\perp \mathbf{S}''(\Delta_s)\|^2, \quad (4.3)$$

avec $\mathbf{S}''(\Delta_s)$ et $\mathbf{S}''(\delta)$ les matrices signal définies en (3.22) lorsque les pas d'échantillonnages angulaires sont Δ_s et δ . On note $\mathbf{P}_{\mathbf{H}''}(\Delta_s)^\perp$ le projecteur orthogonal dans le sous espace orthogonal à $\mathbf{H}''(\Delta_s)$, sous espace issu de la SVD de $\mathbf{S}''(\Delta_s)$.

La figure 4.3 compare l'erreur $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ induite seulement par le tronquage du sous espace lors de la sélection de sa base (on a pris les vecteurs singuliers de $\mathbf{S}''(\Delta_s)$ correspondant aux valeurs singulières les plus fortes) avec l'erreur $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ causée par le “manque de finesse” de Δ_s . On choisit ici $\delta = 2$ degrés et l'étude est faite pour une dimension de sous espace $D = 10$.

On peut déduire de la figure 4.3 que pour $\Delta_s = 10$ degrés, les erreurs $\epsilon(\Delta_s)$ et $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ sont équivalentes : l'erreur induite par le choix du pas angulaire n'est pas plus importante que l'erreur induite par le choix de la dimension du sous espace. Nous choisirons donc $\Delta_s = 10$ degrés comme pas d'échantillonnage angulaire.


 FIG. 4.3 – Erreurs $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ et $\epsilon(\Delta_s)$ en fonctions de Δ_s , pour $D = 10$.

4.1.2.4 Validation du critère “une seule SVD à calculer”

Afin de limiter le coût de calcul de l'algorithme SARSES, on a montré dans 3.2.2.2 qu'il suffisait de calculer une seule SVD pour générer l'ensemble des bases des sous espace propres à une position donnée. Cette simplification n'est possible que si le critère donné en (3.26) est validé. Posons ϵ_i et η_i , les erreurs définies en (3.25) telles qu'entre deux points (x_0, y_0) et (x, y) , les incidences $(\theta_i(x, y), \phi_i(x, y))$ et $(\theta_i(x_0, y_0), \phi_i(x_0, y_0))$ soient telles que :

$$\theta_i(x, y) = \theta_i(x_0, y_0) + \Delta_\theta + \epsilon_i \quad (4.4)$$

$$\phi_i(x, y) = \phi_i(x_0, y_0) + \Delta_\phi + \eta_i, \quad (4.5)$$

avec Δ_θ et Δ_ϕ deux constantes. On considère que l'on calcule la base $\mathbf{H}''_{x_0 y_0}$ définie en (3.24) pour $(x_0, y_0) = (120, -2.5)$ m (le centre de la scène). Les figures 4.4 et 4.5 représentent les erreurs $|\epsilon_i|$ et $|\eta_i|$ entre (x_0, y_0) et $(x_{min}, y_{min}) = (90, -20)$ m puis entre (x_0, y_0) et $(x_{max}, y_{max}) = (150, 25)$. Ces deux cas correspondent aux deux cas limites engendrant le plus d'erreur. On rappelle que le pas d'échantillonnage angulaire choisi est $\Delta_s = 10$ degrés. Les figures 4.4 et 4.5 montrent que le critère (3.25) est respecté dans tous les cas. On a bien $\max_{u_i} \epsilon_i < \Delta_s$ et $\max_{u_i} \eta_i < \Delta_s$. Nous pouvons donc bien nous contenter de calculer une seule SVD pour déterminer l'ensemble des bases nécessaires.

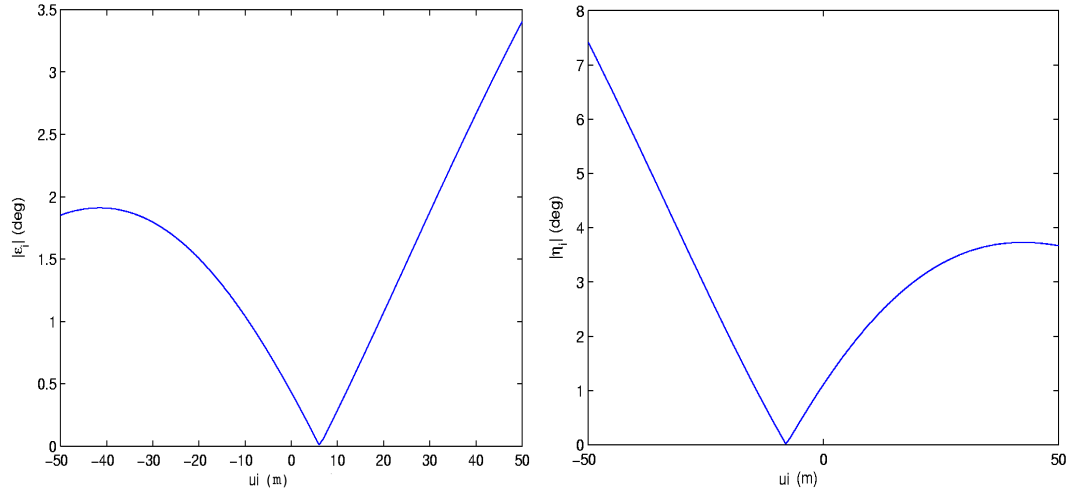


FIG. 4.4 – $|\epsilon_i|$ et $|\eta_i|$ entre (x_0, y_0) et (x_{min}, y_{min}) en fonction des positions u_i .

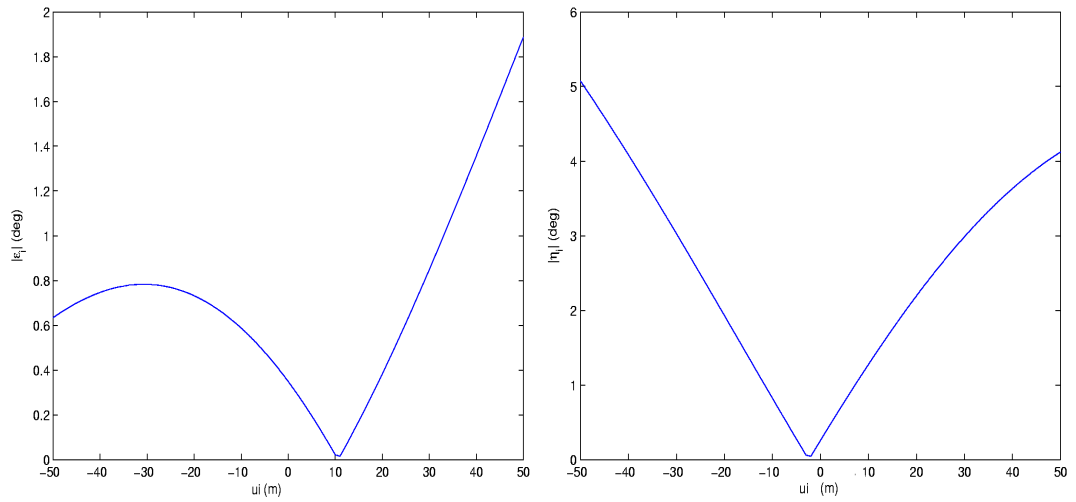


FIG. 4.5 – $|\epsilon_i|$ et $|\eta_i|$ entre (x_0, y_0) et (x_{max}, y_{max}) en fonction des positions u_i .

4.1.3 Propriété de l'image formée

L'algorithme SARSES diffère des algorithmes SAR classiques par le modèle qu'il utilise (respectivement la plaque et le point isotrope) et l'aspect multidimensionnel des sous espaces employés pour former l'image. Il est donc normal que les propriétés des images formées par ces deux algorithmes diffèrent aussi. Deux points importants caractérisant cette différence se révèlent dans la nature des points brillants observés et la résolution de l'image.

4.1.3.1 Résolution des images

En utilisant (3.73) et (3.76), on détermine la fonction d'ambiguïté en distance et en azimut liée à l'algorithme SARSES "variance connue" et "variance inconnue". Cette fonction va nous permettre de déterminer en moyenne la résolution des images obtenues par ces deux algorithmes, c'est à dire la capacité de l'algorithme à séparer deux plaques de $1\text{ m} \times 2\text{ m}$ proches. La résolution donnée n'est qu'une moyenne : la résolution "réelle" de l'image peut varier suivant l'orientation que prend la plaque. La figure 4.6 représente la fonction d'ambiguïté de l'algorithme SARSES "variance connue", en distance et en azimut, pour plusieurs rangs de sous espaces. La figure 4.7 représente celle de la version "variance inconnue".

Lorsque l'on compare la fonction d'ambiguïté propre à l'algorithme SARSES "variance connue" à sa version "variance inconnue", les lobes secondaires de la version "variance inconnue" sont beaucoup plus bas et le lobe principal est plus fin que dans la version "variance connue". Si on compare maintenant chacune des courbes obtenues en fonction du rang du sous espace choisi, on remarque que celle obtenue pour le rang 2 donne un lobe principal très large, voir deux lobes principaux en distance, et des lobes secondaires élevés. Les courbes obtenues pour un sous espace de rang 6 ou 10 donnent un lobe principal unique et fin et des lobes secondaires plus bas. La résolution de l'image obtenue dépend donc directement de la qualité du sous espace choisi : la base du sous espace doit être construite avec tous les vecteurs singuliers associés aux valeurs singulières significatives. On devra donc choisir un nombre de dimension plus près de 6 ou 10 que 2, ce qui rejoint l'analyse faite en 4.1.2.2.

4.1.3.2 Nature des points brillants

Le modèle utilisé par l'algorithme SARSES étant une plaque, il faut considérer que chaque point brillant est une représentation de plaque. Pour mieux illustrer le phénomène, on va choisir comme modèle pour générer les sous espaces une plaque de $2 \times 3\text{ m}$ (plus grande que la taille de plaque que l'on utilise dans les autres parties, afin d'accentuer les phénomènes observés). Les figures 4.8 et 4.9 donnent chacune les images obtenues avec un algorithme SARC et SARSES utilisant un sous espace de dimension 2, 6 et 10 (dont la base est constituée par les 2, 6 et 10 premiers vecteurs singuliers de \mathbf{S}_{xy} , cf. (3.4)) pour deux plaques de $2 \times 3\text{ m}$ orientées différemment. On donne les images obtenues avec les deux versions de l'algorithme SARSES : la version "variance connue" (3.9), où l'on pose que σ^2 est constant et vaut 1 et la version "variance inconnue" (3.10).

Si on regarde les images données dans les figures 4.8 et 4.9 obtenues avec l'algorithme SARC, les points brillants sont répartis le long des plaques. Avec l'algorithme SARSES, lorsque les sous espaces utilisés sont de dimension suffisamment importante (leur base est formée par les vecteurs singuliers de \mathbf{S}_{xy} associée aux valeurs singulières les plus fortes), le pixel ayant l'intensité la plus forte correspond au centre de phase de plaque (c'est à dire le point où l'on considère que tout le signal est réfléchi). Cette intensité augmente fortement avec la dimension du sous espace considéré. Ces deux exemples illustrent les résultats trouvés en 4.1.3.1 et mettent en lumière une propriété intéressante de l'algorithme SARSES, celle d'imager les centres de phase de plaque.

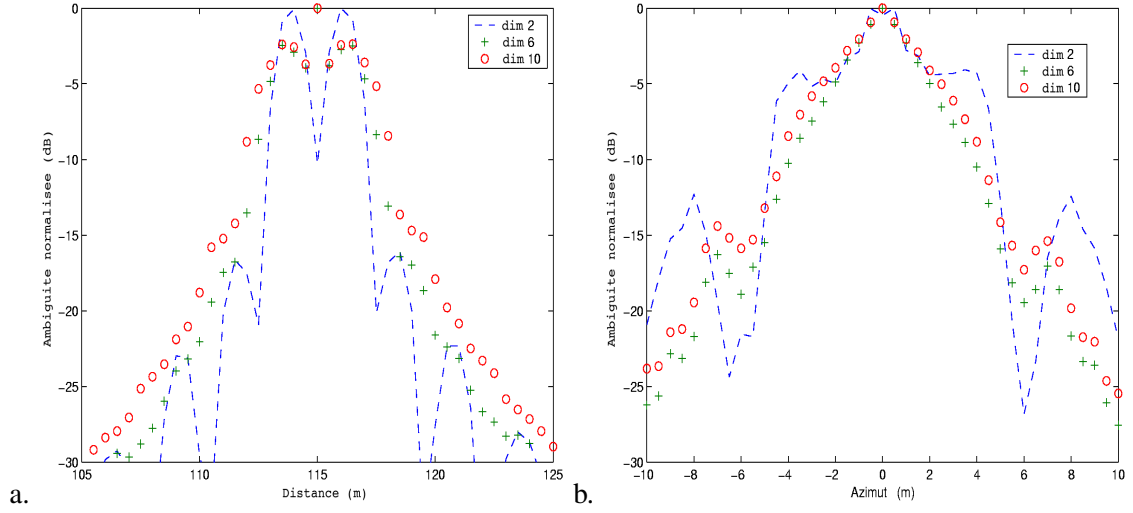


FIG. 4.6 – Fonction d’ambiguïté en distance (a.) et en azimuth (b.) de l’algorithme SARSES “variance connue”.

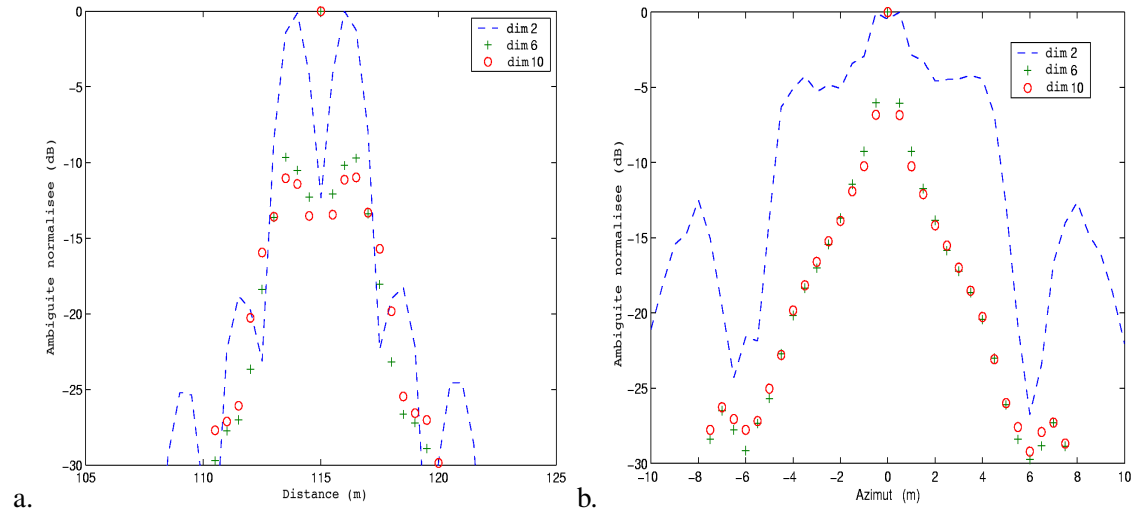


FIG. 4.7 – Fonction d’ambiguïté en distance (a.) et en azimuth (b.) de l’algorithme SARSES “variance inconnue”.

4.1. Performances de l'algorithme SARSES en bande P

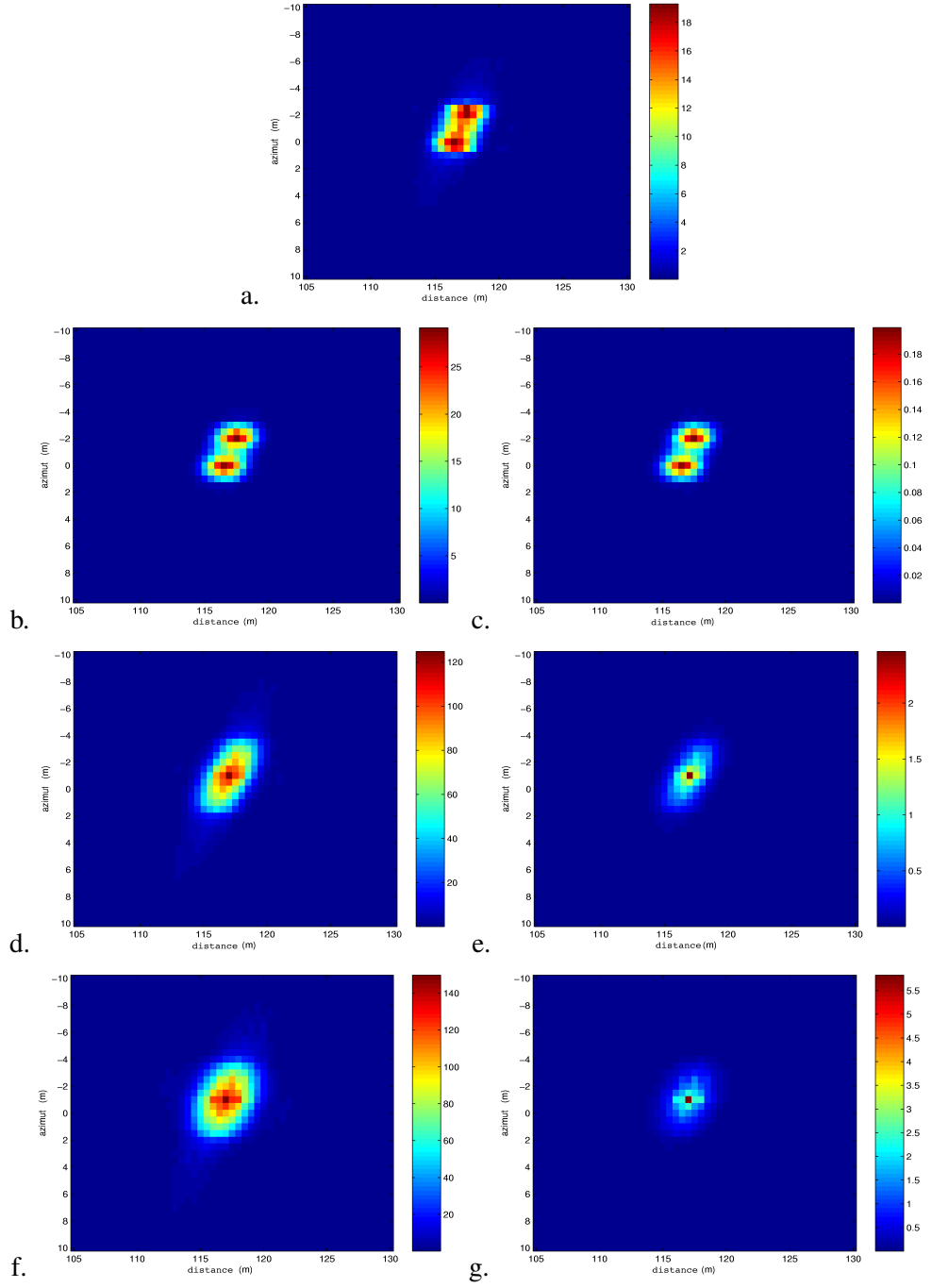


FIG. 4.8 – Plaque de 2×3 m, orientée suivant $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/8)$: a. Image SARC, b. image SARSES rang 2 variance connue, c. image SARSES rang 2 variance inconnue, d. image SARSES rang 6 variance connue, e. image SARSES rang 6 variance inconnue, f. image SARSES rang 10 variance connue, g. image SARSES rang 10 variance inconnue.

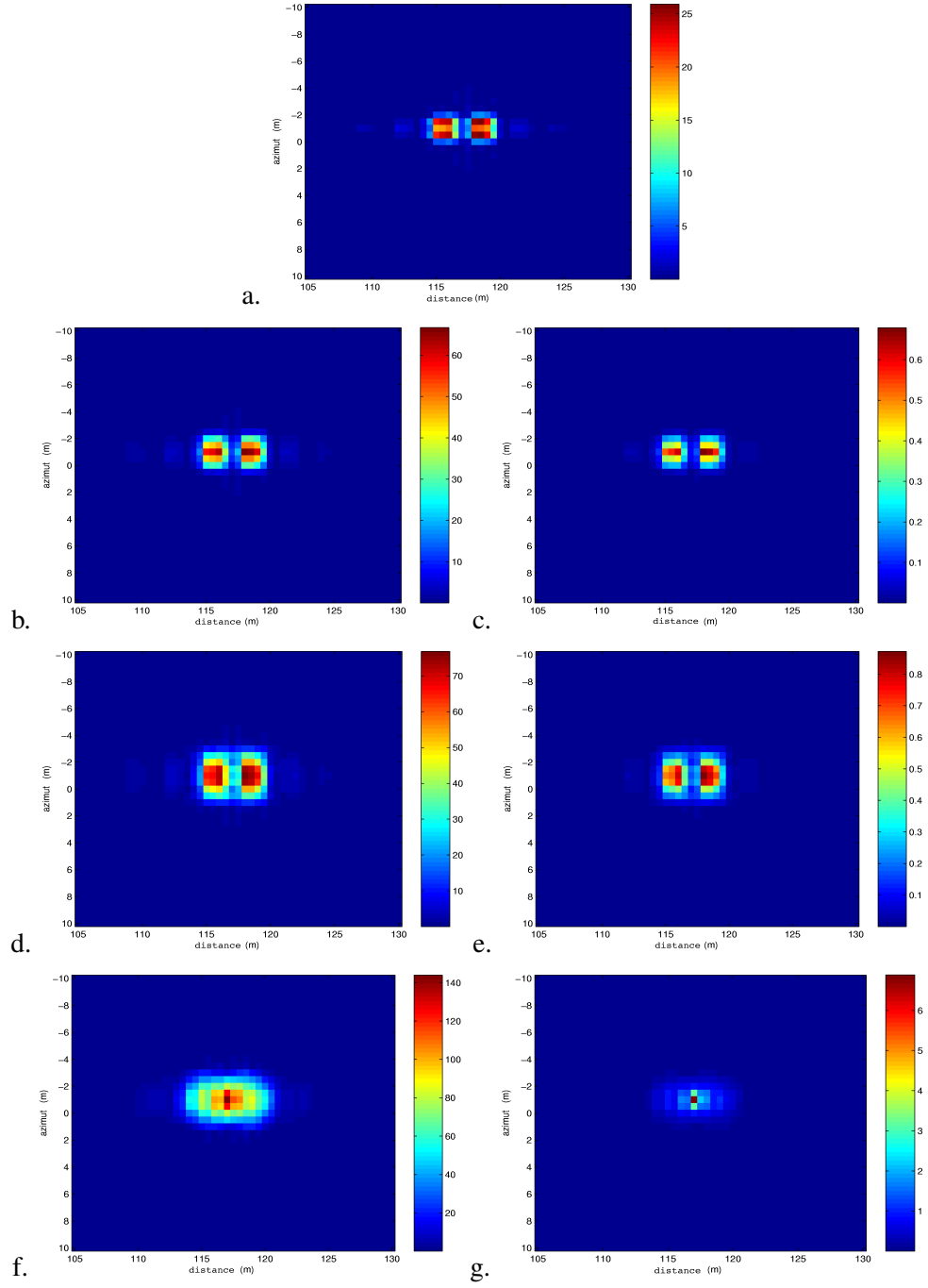


FIG. 4.9 – Plaque de 2×3 m, orientée suivant $(\alpha, \beta) = (0, 0)$: a. Image SARC, b. image SARSES rang 2 variance connue, c. image SARSES rang 2 variance inconnue, d. image SARSES rang 6 variance connue, e. image SARSES rang 6 variance inconnue, f. image SARSES rang 10 variance connue, g. image SARSES rang 10 variance inconnue.

4.1.4 Détection de cibles manufacturées dans du bruit blanc Gaussien

Afin d'évaluer les performances de détection du nouvel algorithme, il est nécessaire dans un premier temps de connaître ses performances dans du bruit blanc Gaussien. On va donc tout d'abord comparer l'algorithme SARSES avec l'algorithme SARC lorsque la cible est une plaque métallique simple, puis lorsque la cible est un objet manufacturé simple comme un pavé métallique. Les configurations du vol et de la scène sont les mêmes que celles présentées en 4.1.2.1.

4.1.4.1 Détection d'une plaque métallique

Une première étape pour tester l'algorithme SARSES est de montrer que la détection d'une plaque élémentaire est meilleure qu'avec l'algorithme SARC. Pour calculer la probabilité de détection et la probabilité de fausse alarme, on utilisera les résultats trouvés en (2.10) et (2.12).

Nous nous plaçons dans la configuration donnée en 4.1.2.1. Le modèle d'élément canonique utilisé pour générer le sous espace est une plaque métallique de 1×2 m. On teste deux aspects de notre algorithme : la robustesse aux variations de taille et d'orientation des plaques.

- **Robustesse aux variations d'orientation :** On va dans un premier temps tester la capacité de notre algorithme à "mieux détecter" une plaque de 1×2 m dans différentes orientations. Les figures 4.10 et 4.11 donnent la Probabilité de Détection (PD) en fonction du Rapport Signal à Bruit ou Signal to Noise Ratio (SNR) pour deux Probabilités de Fausse Alarme (PFA) données. Deux orientations de plaque à détecter sont considérées, la première est définie par $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ et la seconde par $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/6)$. Chacune des figures représente cinq courbes correspondant aux performances de l'algorithme SARSES utilisant un sous espace de dimension 2, 6 et 10, de l'algorithme SARC et d'un algorithme SARSES utilisant la réponse exacte de la plaque comme sous espace (cas où les performances seront optimales). Dans les deux cas, on observe que l'algorithme SARSES utilisant un sous espace de dimension 6 ou plus apporte un gain significatif aux performances de détection : pour une PD de 0.9, au rang 10, on obtient 1.5 dB de gain par rapport à l'algorithme SARC pour la configuration donnée figure 4.10 et 4 dB pour la configuration donnée figure 4.11. On peut aussi remarquer que d'une configuration à l'autre, la courbe de performance correspondant au sous espace de dimension 10 ne se décale pas (ou peu), ce qui illustre la robustesse aux variations d'orientation de l'algorithme.
- **Robustesse aux variations de taille de plaque :** En conservant le même modèle de plaque (1×2 m), on veut tester la capacité de l'algorithme à améliorer la détection de plaques n'ayant pas forcément la même taille que celle utilisée comme modèle. Les figures 4.12 et 4.13 donnent les performances obtenues par l'algorithme SARSES lorsque la cible est une plaque métallique de 2×3 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ (figure 4.12) et $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/6)$ (figure 4.13). Seul l'algorithme SARSES dimension 10 permet d'obtenir de bonnes performances : on observe un gain de 2 à 3 dB pour une PD de 0.9 par rapport à l'algorithme SARC dans les deux cas. Si on utilise un sous espace suffisamment grand, l'algorithme SARSES montre des propriétés de robustesse aux variations de taille de plaque (bien sur, si la taille du modèle et la taille de la cible sont très différentes, les performances se dégradent fortement).

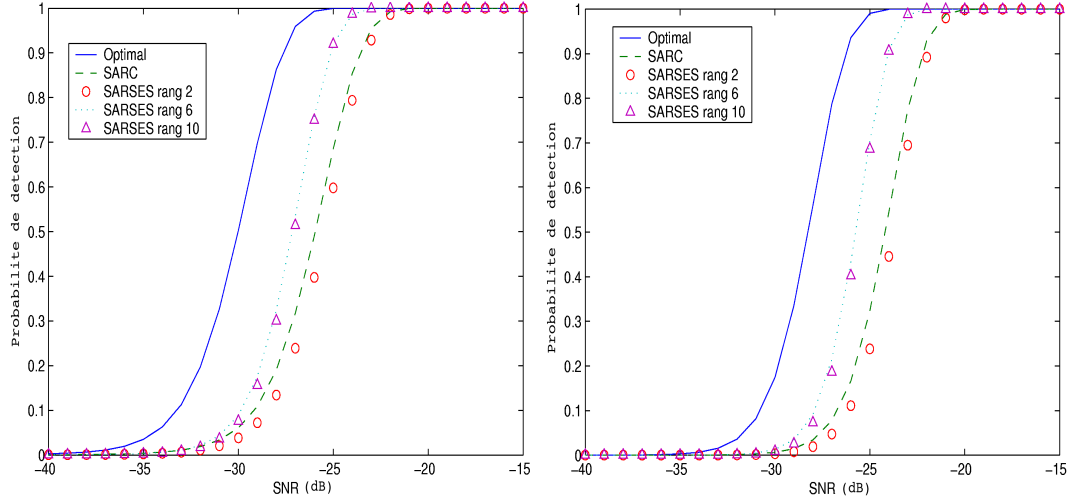


FIG. 4.10 – PD en fonction du SNR d'une plaque de 1×2 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).

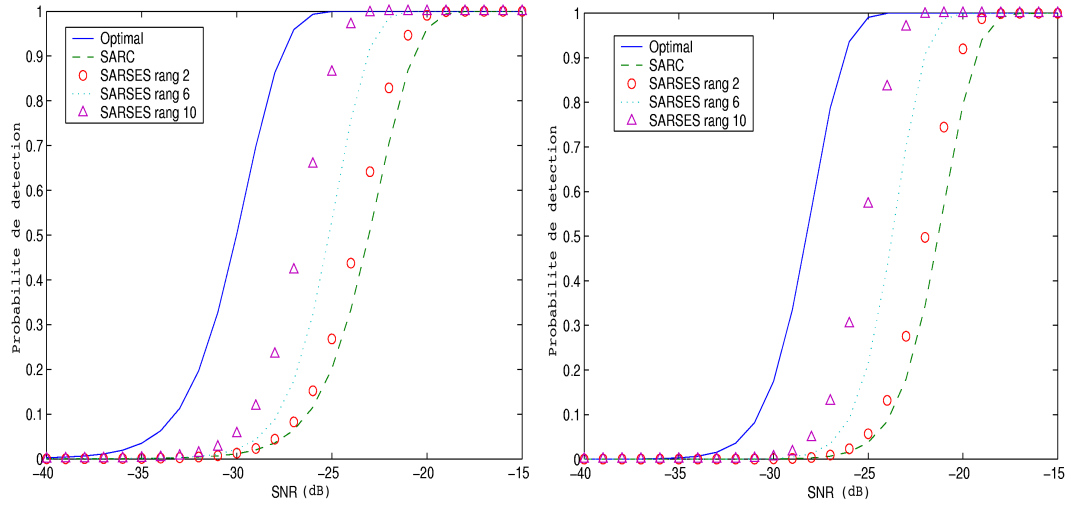


FIG. 4.11 – PD en fonction du SNR d'une plaque de 1×2 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/6)$ pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).

4.1. Performances de l'algorithme SARSES en bande P

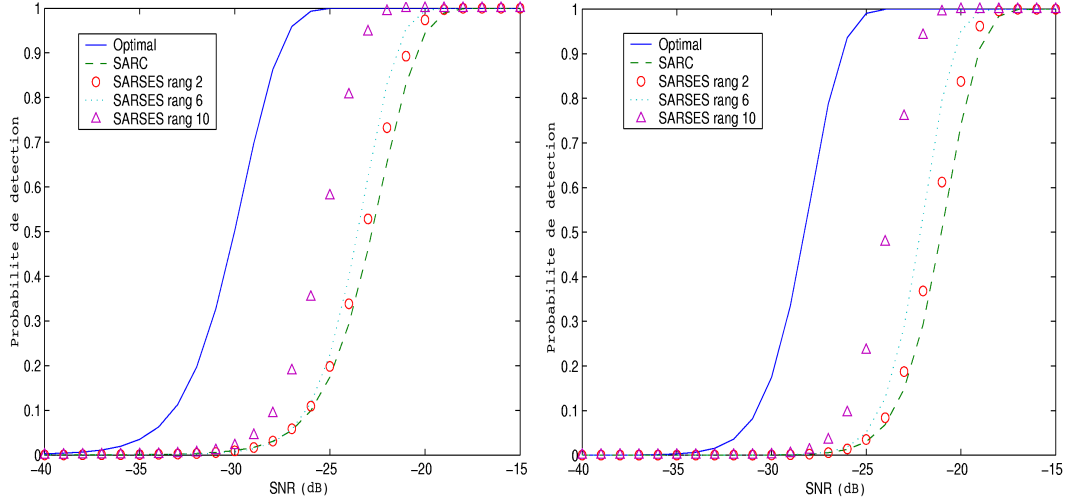


FIG. 4.12 – PD en fonction du SNR d'une plaque de 2×3 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).

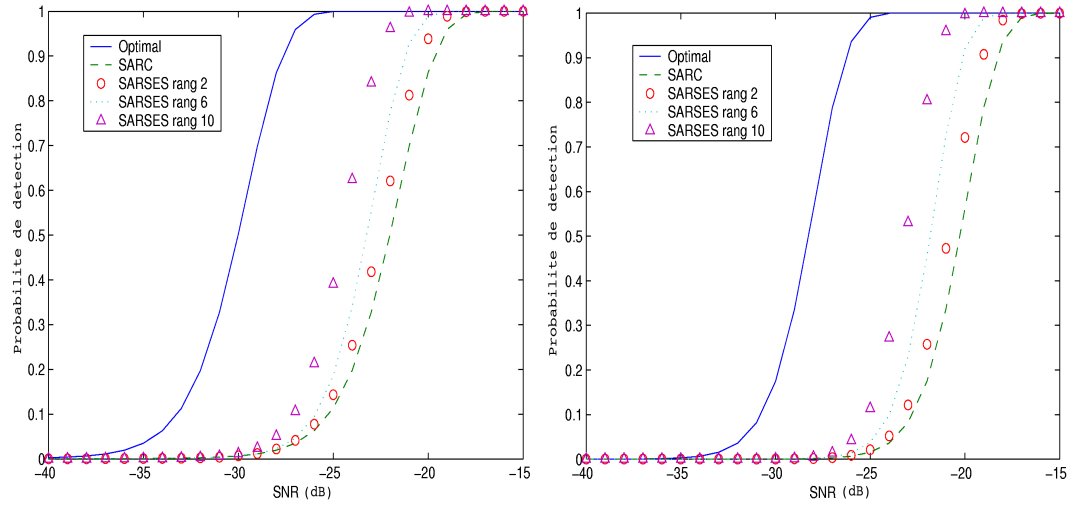


FIG. 4.13 – PD en fonction du SNR d'une plaque de 2×3 m orientée suivant $(\alpha, \beta) = (\pi/2, \pi/6)$ pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).

4.1.4.2 Détection d'un pavé métallique

Pour valider notre approche et les performances de l'algorithme SARSES, on choisit de simuler la réponse d'un pavé métallique de $2\text{ m} \times 1.5\text{ m} \times 1\text{ m}$ reposant sur un sol parfaitement conducteur avec FEKO [29], un logiciel commercial de calcul de diffusion électromagnétique basé sur la méthode des moments. L'avantage de ce type de simulation est de prendre en compte des phénomènes comme les couplages, les rebonds... qui interviennent lors de la diffusion sur cible complexe et que l'on ne sait pas modéliser avec des codes approchés.

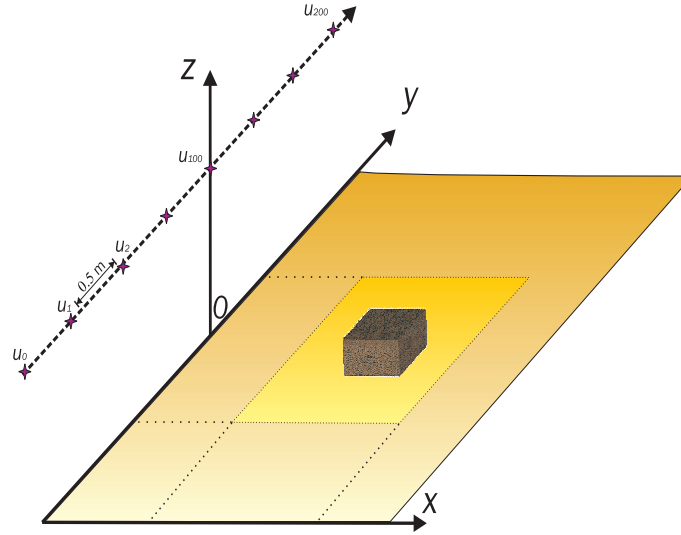


FIG. 4.14 – Configuration de la scène.

Une fois encore, nous allons considérer les performances de détection de l'algorithme SARSES et les comparer à celle de l'algorithme SARC. On envisage deux orientations pour le pavé métallique : la première est comme montrée dans la figure 4.14 : la grande arête du pavé est parallèle au vol, la seconde considère un pavé ayant subi une rotation de $\pi/8$ (sens direct) autour de l'axe perpendiculaire au sol passant par le centre du pavé. Les figures 4.15 et 4.16 donnent respectivement la probabilité de détection en fonction du rapport signal à bruit de la boîte avec et sans rotation.

On observe qu'à partir d'un sous espace de dimension 6, le gain par rapport à l'algorithme SARC pour une PD de 0.9 est de 5 dB pour la première configuration et entre 2 et 3 dB pour la seconde. Comme dans le cas de la plaque, on constate aussi que les performances d'une configuration à l'autre ne change pas (ou peu), en terme de PD en fonction du SNR, pour un sous espace de dimension 6 ou plus ce qui n'est pas le cas pour l'algorithme SARC dont les performances varient d'une configuration à l'autre .

4.1. Performances de l'algorithme SARSES en bande P

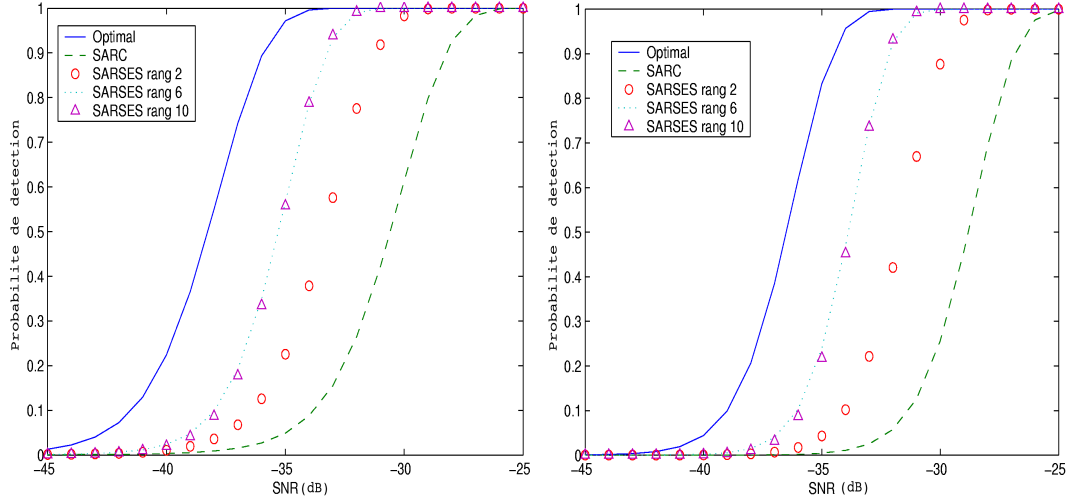


FIG. 4.15 – PD en fonction du SNR du pavé pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).

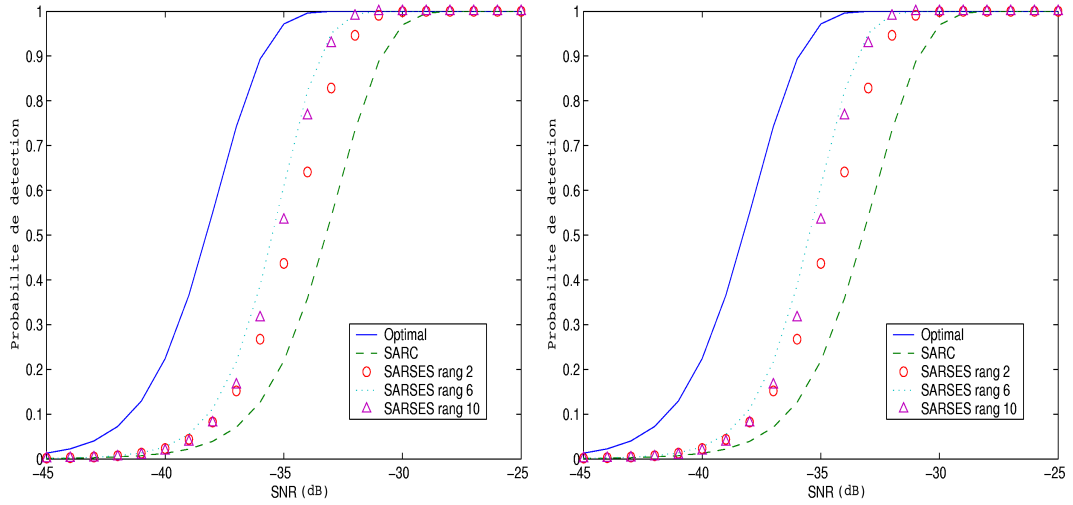


FIG. 4.16 – PD en fonction du SNR du pavé ayant subi une rotation de $\pi/8$ autour de l'axe vertical pour une PFA de 10^{-4} (à gauche) et 10^{-6} (à droite).

4.1.5 Détection de cibles manufacturées dans une forêt

La détection d'objets manufacturés sous le feuillage appartient à une thématique plus générale appelée FOPEN pour FOLIage PENetration (pénétration sous couvert). A suffisamment basse fréquence, les ondes électromagnétiques peuvent pénétrer la canopée et se réfléchir sur les diffuseurs au sol. Il est donc, à priori, possible de détecter des cibles militaires, comme des camions ou des tanks, cachées dans une forêt. Les troncs d'arbres cependant, eux même situés sous la canopée, constituent une source de fausses alarmes très importante qu'il est difficile de supprimer même avec des traitements polarimétriques et interférométriques (ceux ci sont particulièrement adaptés au traitement de la canopée (cf. [2][26][27])). Dans cette section, nous allons dans un premier temps tester sur simulations la capacité de notre algorithme à différencier une cible manufacturée de troncs d'arbre en améliorant le contraste entre les pixels représentant la cible et à ceux représentant les troncs. On applique ensuite notre algorithme sur données réelles.

4.1.5.1 Données simulées

On veut tester la capacité de l'algorithme SARSEs à différencier des troncs d'une cible manufacturée. Reprenons la configuration donnée en 4.1.2.1, avec $(x, y) = (118, -1)$ m la position de la cible. Notre cible sera ici le même pavé métallique que celui utilisé en 4.1.4.2. On simule une réponse de forêt à partir d'un simulateur de signaux SAR utilisant le logiciel COSMO ([28]). La forêt considérée est une forêt de troncs d'arbres en diélectrique de 11 m de hauteur et de rayon 20 cm, dont les troncs sont séparés de 4 m, plus ou moins 1 m. Une illustration de cette configuration est donnée figure 4.17.

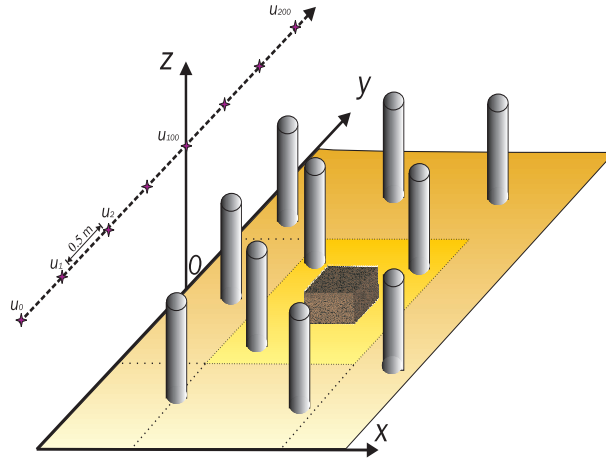


FIG. 4.17 – Configuration de la scène.

Là encore, nous allons considérer deux orientations pour le pavé, la première ne considérant aucune rotation, la seconde, une rotation de $\pi/8$ autour de l'axe vertical. Les figures 4.18 et 4.19 donnent les images obtenues de la scène avec les algorithmes SARC, SARSEs dimension 2, dimension 6 et dimension 10, version variance du bruit connue et inconnue. La cible est indiquée, dans les cas où on ne la voit pas clairement, par une flèche blanche. Dans le premier cas, l'apport de notre algorithme est très clair : l'image obtenue par un processeur SAR classique permet à peine de distinguer la cible, l'intensité des pixels la représentant est faible par rapport à l'intensité des pixels des troncs d'arbre. L'utilisation de notre algorithme permet de mettre en relief la cible. Plus on va utiliser une dimension de sous espace importante, plus l'intensité du pixel représentant le pavé sera importante. A la dimension 10, l'intensité des pixels représentant le pavé atteint plus de deux fois ceux des troncs.

4.1. Performances de l'algorithme SARSES en bande P

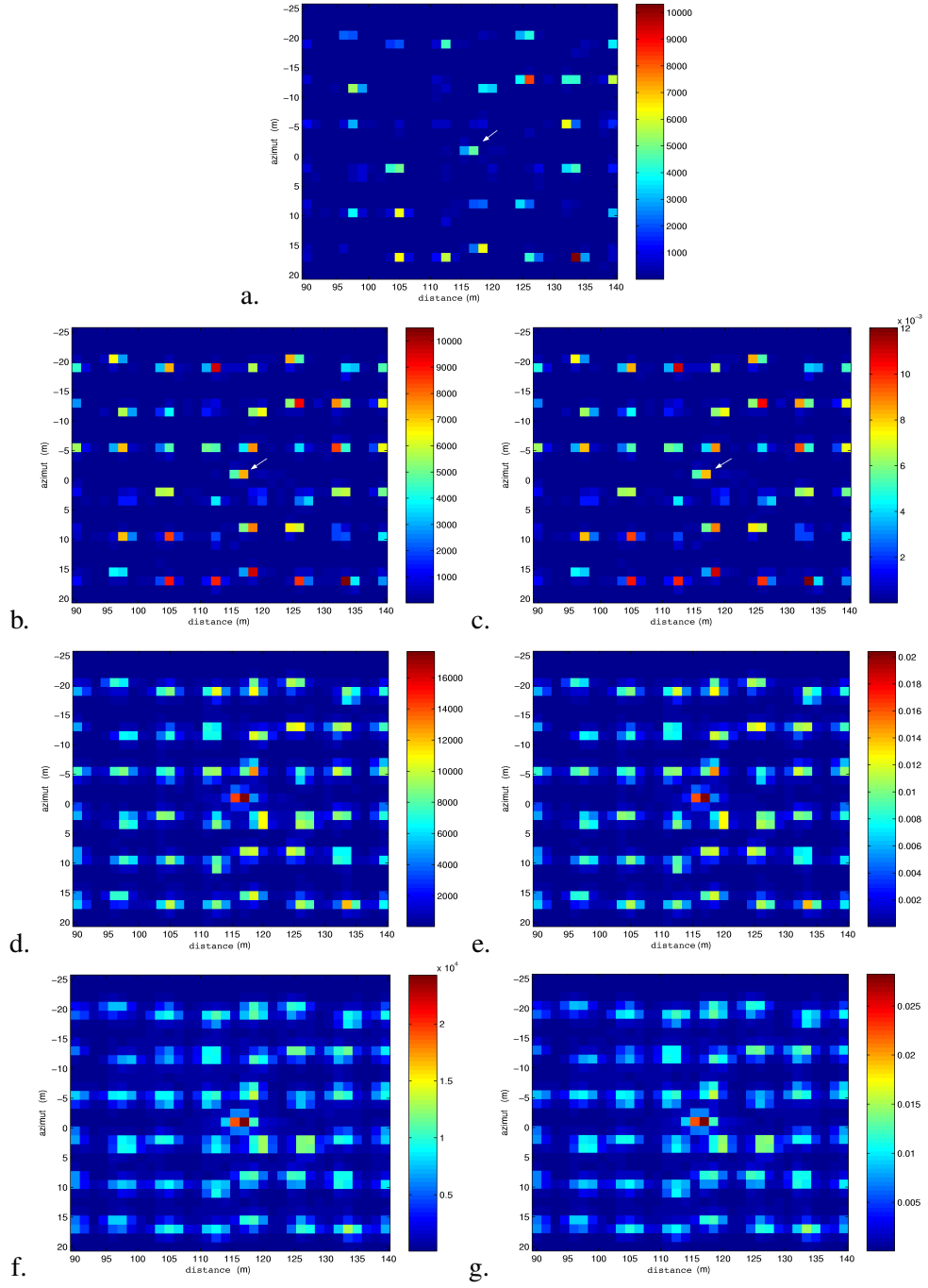


FIG. 4.18 – Boîte métallique dans la forêt : a. Image SARC, b. image SARSES rang 2 variance connue, c. image SARSES rang 2 variance inconnue, d. image SARSES rang 6 variance connue, e. image SARSES rang 6 variance inconnue, f. image SARSES rang 10 variance connue, g. image SARSES rang 10 variance inconnue.

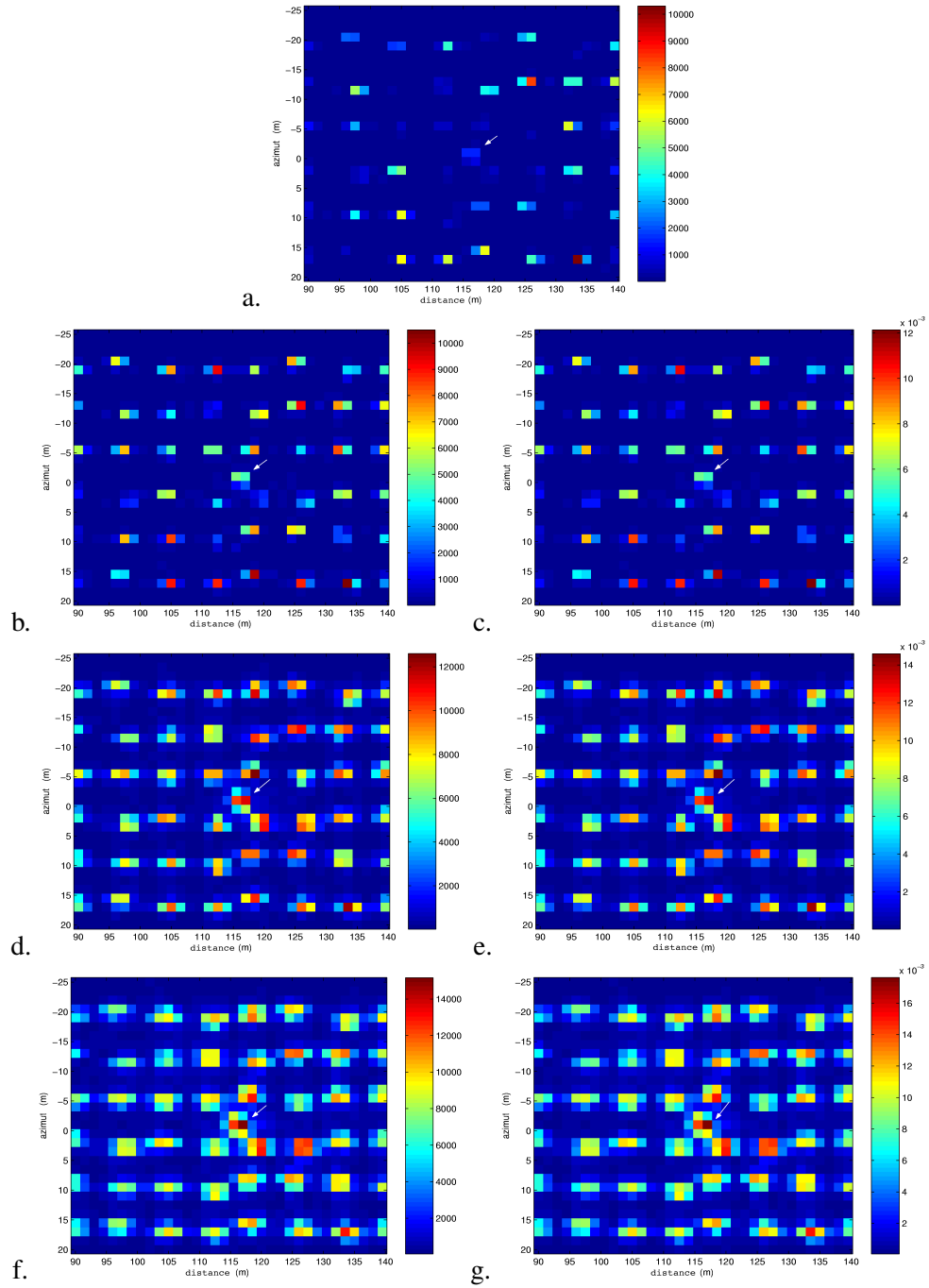


FIG. 4.19 – Boîte métallique dans la forêt ayant subi une rotation de $\pi/8$ autour de l'axe vertical : a. Image SARC, b. image SARSES rang 2 variance connue, c. image SARSES rang 2 variance inconnue, d. image SARSES rang 6 variance connue, e. image SARSES rang 6 variance inconnue, f. image SARSES rang 10 variance connue, g. image SARSES rang 10 variance inconnue.

4.1. Performances de l'algorithme SARSES en bande P

Dans le second cas (celui où l'on considère une rotation de $\pi/8$ sur le pavé), l'intensité des pixels représentant la cible est faible comparée à celle des troncs. L'intensité des pixels représentant la cible obtenue avec l'algorithme SARSES de dimension 10 devient légèrement supérieure à celle des arbres. Cependant, malgré la forte augmentation de la réponse du pavé, le signal reçu par l'antenne synthétique étant très faible, le rapport signal à clutter (constitué des réponses de troncs) est très faible. Le pavé étant une cible très directive dans cette bande de fréquence, lui faire subir une rotation décale son lobe principal de rétrodiffusion. Très peu de signal est reçu au niveau de l'antenne synthétique. Ce phénomène s'applique en général aussi aux véhicules. Cet exemple a pour but de mettre en évidence, malgré la forte augmentation du niveau de la cible, l'impossibilité de systématiquement détecter une cible quelque soit son orientation : au delà d'une certaine orientation, l'absence de signal diffusé par la cible en direction du récepteur rend la détection extrêmement compliquée. C'est cependant cette directivité de la réponse des cibles manufacturées qu'exploite l'algorithme SARSES pour les différencier des troncs d'arbres, qui ont une symétrie azimutale.

4.1.5.2 Données réelles

Pour valider notre approche théorique au delà des simulations, nous avons eu la chance de tester nos algorithmes sur des données réelles. Les données présentées dans cette section ont été acquises par RAMSES, le moyen SAR aéroporté de l'ONERA, en bande P (entre 400 et 470 MHz), lors de la campagne PYLA'2004. Les signaux traités correspondent à une acquisition faite en survolant une forêt des Landes. Cette forêt est décrite en précision dans [28]. On s'intéresse à une des parcelles de cette forêt où sont placés un trièdre et un camion. Le camion est parallèle au vol, le trièdre orienté vers celui ci. La scène est représentée sur la figure 4.20

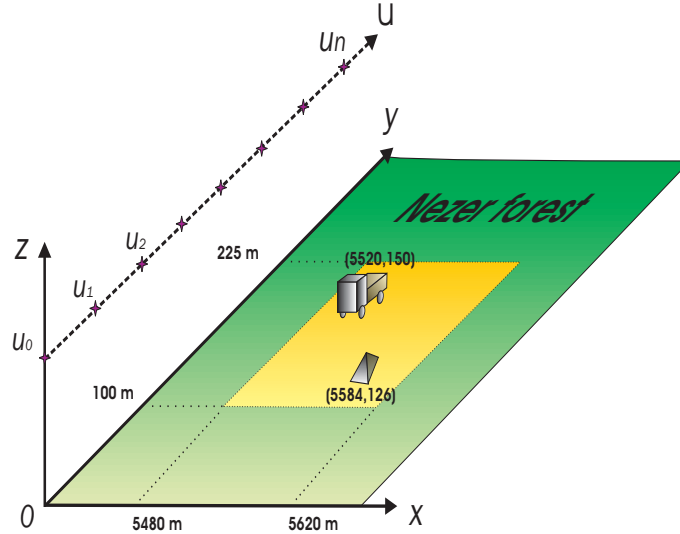


FIG. 4.20 – Configuration de la scène.

La parcelle que l'on considère est située dans le cadre blanc de l'image figure 4.21 obtenue avec l'algorithme RMA.

La figure 4.22 représente les images obtenues en polarisation VV par les algorithmes RMA (algorithme présenté dans le chapitre 1) et SARSES dimension 2, 6 et 10. Le modèle de plaque que l'on utilise est une plaque de 4 m \times 2 m. L'image obtenue avec l'algorithme RMA contient de nombreuses fausses alarmes du même ordre d'amplitude que les cibles. Dans les trois images obtenues avec l'algorithme

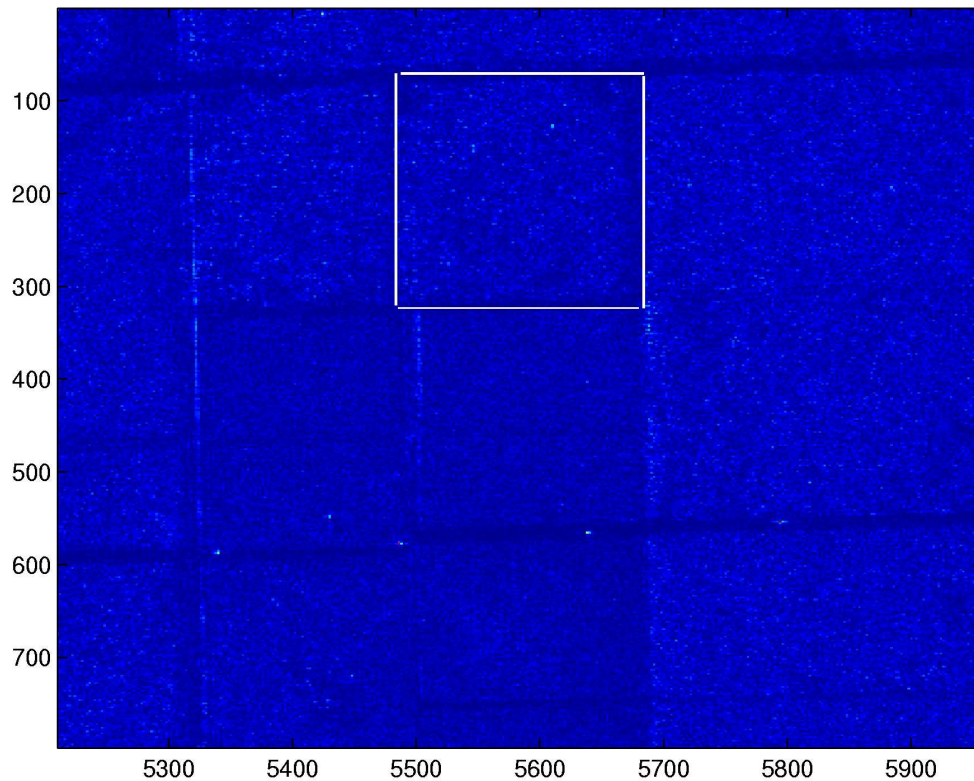
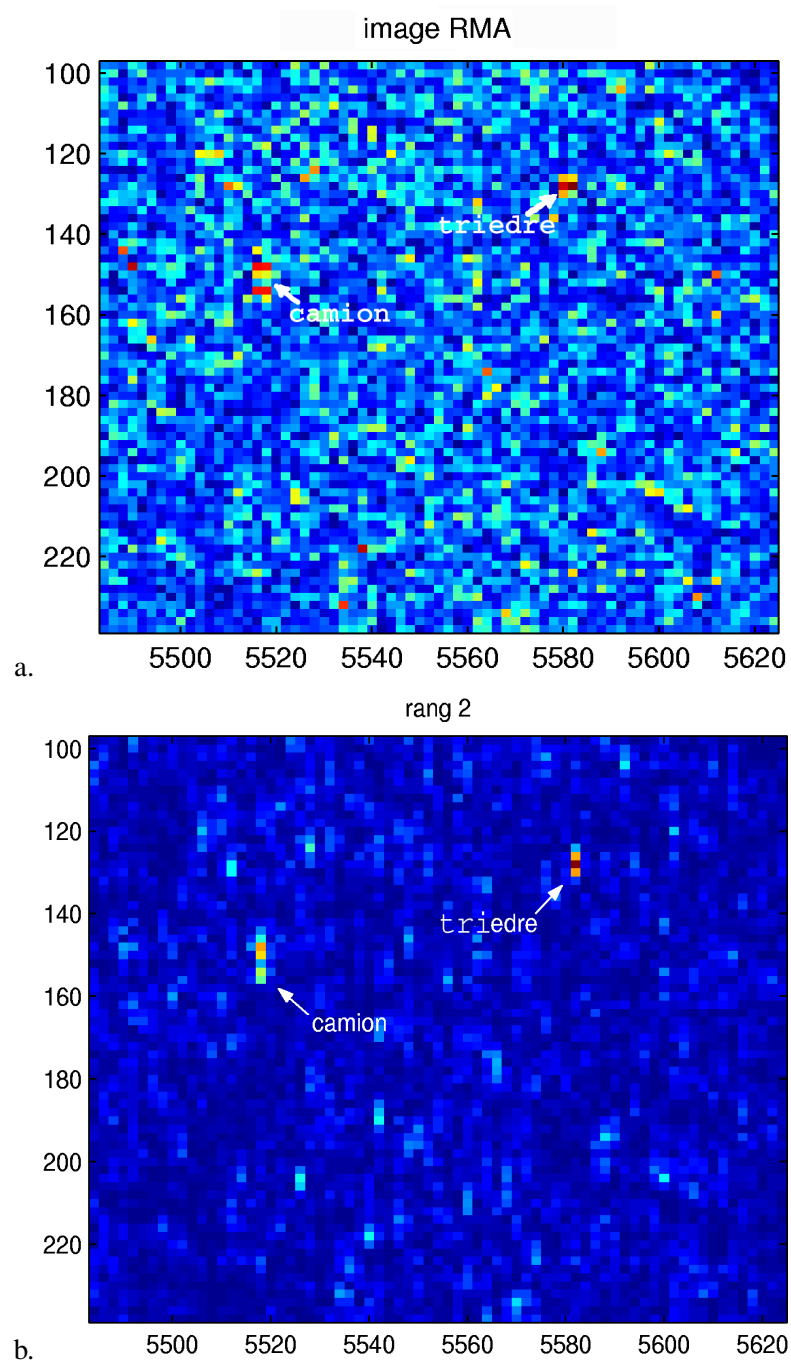


FIG. 4.21 – Image RMA de la scène.

SARSES, le trièdre et le camion ressortent nettement. A première vue, on pourrait penser qu'un sous espace de dimension 2 donne de meilleurs résultats que les autres, les pixels correspondant au clutter étant de faible amplitude. Cependant, la réponse du camion est assez faible par rapport à celle du trièdre, et c'est bien le camion qui nous intéresse le plus. Pour les dimensions 6 et 10, l'amplitude des pixels correspondant au camion devient plus importante que celle correspondant au trièdre. De plus la différence d'amplitude qu'il existe entre le camion et le pixel de clutter de plus forte intensité est de 2.7 et 3 dB en dimension 6 et 10 alors que la différence entre les pixels représentant le trièdre et le clutter (à son maximum) en dimension 2 est de 2.3 dB.

Les résultats obtenus par l'algorithme SARSES sont très encourageants considérant la différence qu'il existe avec l'image RMA. Il existe de plus une différence intéressante entre les algorithmes SARSES de dimension 2, 6 et 10 : les pixels représentant le camion ont une amplitude plus importante que ceux du trièdre à partir de la dimension 6. Ce résultat suggère que même si le trièdre est une cible directive, le camion, qui est plus proche d'une structure "faite de plaque", répond plus fort et est donc plus facilement détectable. Les dimensions 6 et 10 semblent donc faire une distinction plus fine entre deux cibles directives, l'une étant plus proche du modèle d'élément canonique que l'autre.

4.1. Performances de l'algorithme SARSES en bande P



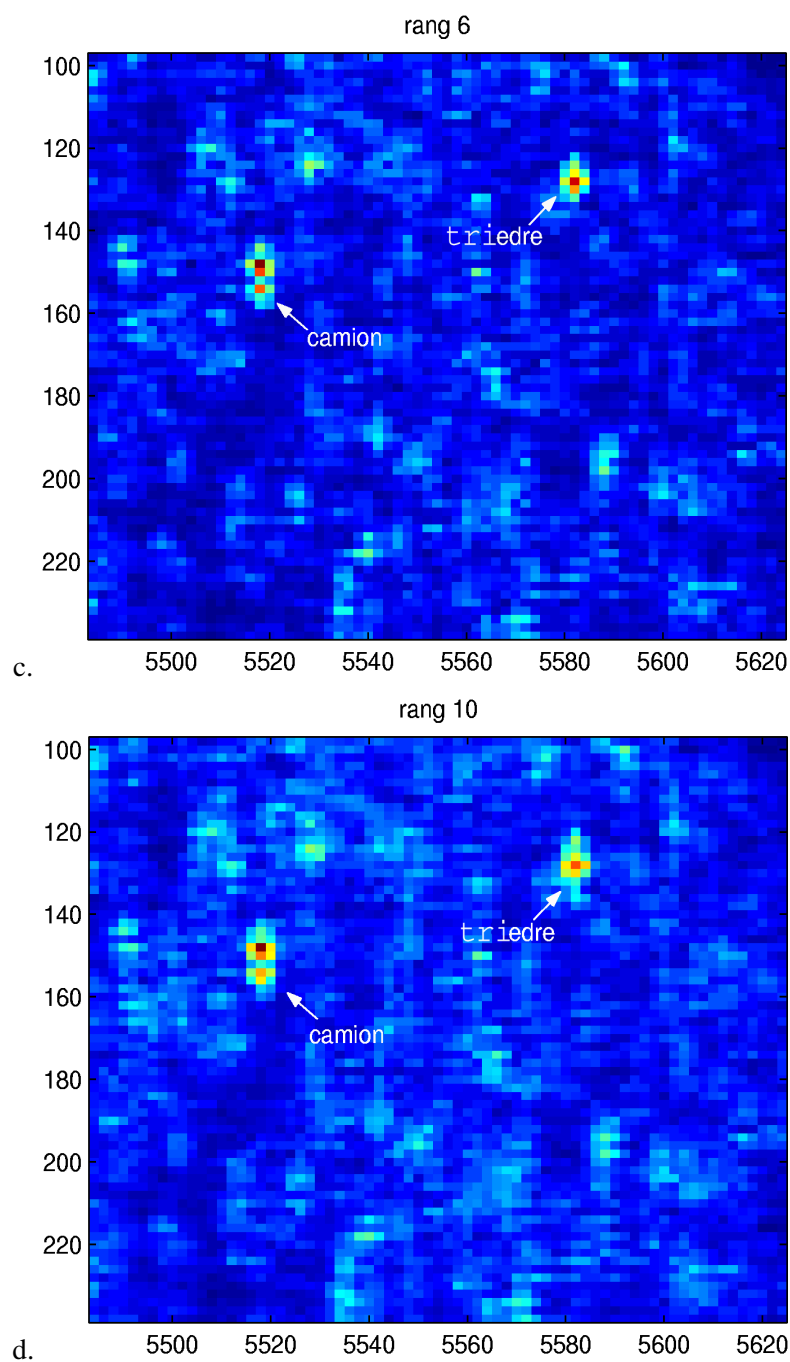


FIG. 4.22 – Camion et trièdre sans la forêt de Nezer, a. : Image formée par un RMA, b. : image formée par un algorithme SAR SES dimension 2, c. : image formée par un algorithme SAR SES dimension 6, d. : image formée par un algorithme SAR SES dimension 10.

4.2 Performances de l'algorithme SARSESI en bande P

Comme nous l'avons vu dans la partie 4.1.5, il se peut que l'algorithme SARSES seul ne suffise pas à séparer une cible des fausses alarmes créées par les troncs. Un faible rapport signal à bruit peut résulter de l'orientation de la cible ou d'une forêt humide et dense (le niveau des double rebonds, rebond sur le tronc puis sur le sol ou réciproquement, est alors très élevé). Dans ces cas là, augmenter la réponse de la cible n'est pas suffisant pour la détecter avec un taux de fausse alarme faible. Il peut donc être intéressant de prendre en compte l'origine des fausses alarmes afin de les supprimer. En modélisant correctement notre problème, l'usage de l'algorithme SARSESI développé en 3.1.2.2 permet de traiter et supprimer en partie les fausses alarmes.

4.2.1 Hypothèses sur la réponse de la forêt en bande P

Comme nous l'avons déjà remarqué, la principale source de fausses alarmes en bande P lors d'une détection de cible manufacturée dans la forêt vient des troncs d'arbre. Nous allons donc poser dans cette partie que le clutter est constitué d'interférences localisées causées par la réponse de cylindres diélectriques inclinés plus du bruit blanc Gaussien. Cette hypothèse nécessite bien sûr d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de la hauteur et du diamètre des troncs. Les hypothèses de décomposition de la cible restent identiques à 4.1.1.

4.2.2 Validation des critères de fonctionnement

4.2.2.1 Paramètres

- **Paramètres de calcul de la base :**
 - Modèle choisi : on choisit comme modèle d'élément canonique un cylindre diélectrique de 11 m de haut et de 20 cm de rayon. On considérera que l'orientation du cylindre est telle que $(\gamma, \delta) \in [0, 360] \times [0, 10]$ degrés (les orientations γ et δ sont définies figure 2.3).
 - Code de calcul : le code pour calculer la matrice de diffusion du cylindre sera le code basé sur l'approximation de l'optique physique donné dans [24]. La permittivité des troncs est calculé à partir de [31] en prenant comme exemple du bois constitué à 50% d'eau.
- **Paramètres SAR :** Les paramètres de vol restent identiques à ceux de la section 4.1.1

4.2.2.2 Sous espace de petite dimension

Afin d'appliquer l'algorithme SARSESI correctement, il faut que le sous espace engendré par l'élément canonique modélisant la cible (plaque) soit de petite dimension, ce qui a été montré en 4.1.2.2, ainsi que celui modélisant l'interférence (cylindre). La figure 4.23 représente les valeurs singulières, pour différentes hauteurs et diamètres de cylindre en bois, de la matrice de signaux S'' , définie en (3.22).

Pour chacune des configurations présentées dans la figure 4.23, on peut clairement considérer que chacun des sous espace engendré par les différents cylindres est de petite dimension. On remarque que la taille du sous espace engendré dépend principalement de la hauteur du cylindre : plus elle est importante, plus grande sera la dimension du sous espace engendré.

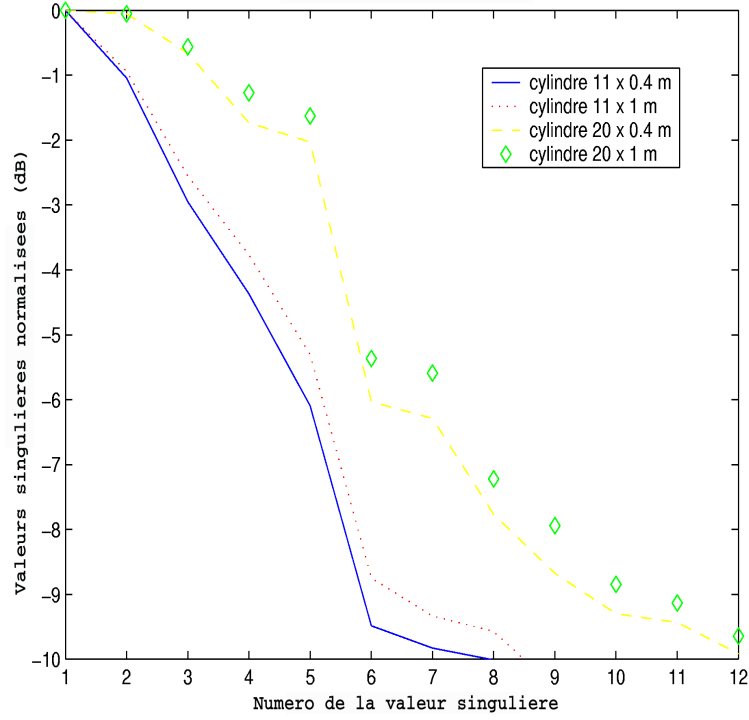


FIG. 4.23 – Valeurs singulières normalisées pour différentes tailles de cylindres.

4.2.2.3 Pas d'échantillonnage angulaire

Afin de réduire la charge de calcul, on doit là encore choisir le pas d'échantillonnage angulaire pour la matrice S'' , définie en (3.22). Celui-ci doit être le plus grand possible, tout en respectant le critère donné en (3.8). Soit δ le plus petit pas angulaire possible (c'est à dire générant une matrice de taille acceptable par le calculateur). Posons Δ_s le plus grand pas angulaire possible respectant le critère (3.8). L'erreur due au choix du pas angulaire $\epsilon(\Delta_s)$ et l'erreur due au choix de la dimension du sous espace $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ doivent être telles que :

$$\epsilon(\Delta_s) \approx \epsilon_{ref}(\Delta_s). \quad (4.6)$$

Les notations sont les mêmes que celles données dans la section 4.1.2.3.

La figure 4.24 compare l'erreur $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ seulement induite par le tronquage du sous espace lors de la sélection de sa base (on a pris les vecteurs singuliers de $S''(\Delta_s)$ correspondant aux valeurs singulières les plus fortes) avec l'erreur $\epsilon(\Delta_s)$ causée par le "manque de finesse" de Δ_s . On choisi ici $\delta = 2$ degrés et l'étude est faite pour une dimension de sous espace $D = 10$.

Pour que l'on ait véritablement $\epsilon(\Delta_s) \approx \epsilon_{ref}(\Delta_s)$, il faudrait choisir $\Delta_s = \delta_s$, ce qui rend la charge de calcul trop importante. On se contentera de choisir $\Delta_s = 5$ degrés, bien que l'erreur due au pas d'échantillonnage soit plus importante que celle due au choix de la dimension du sous espace. Ce pas angulaire induira aussi certainement une faible erreur supplémentaire aux coordonnées limites de l'image, due au non parfait respect du critère 3.26.

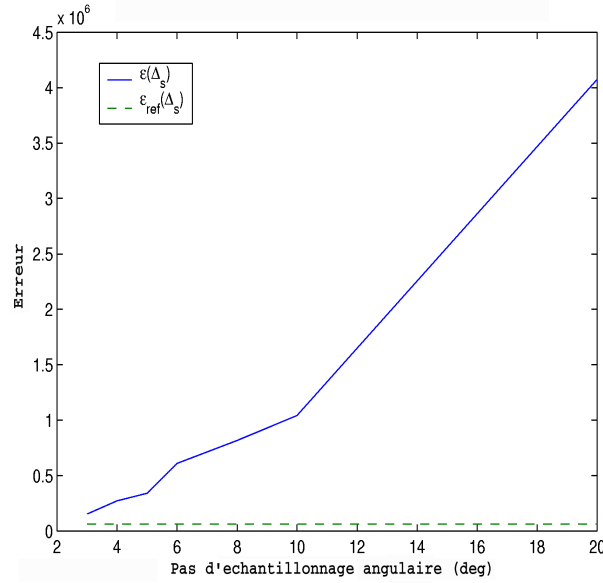


FIG. 4.24 – Erreurs $\epsilon_{ref}(\Delta_s)$ et $\epsilon(\Delta_s)$ en fonctions de Δ_s , pour $D = 10$.

4.2.3 Détection de cibles manufacturées sous couvert forestier

4.2.3.1 Données simulées

On reprend la même configuration de simulation que 4.1.5.1. On considère cette fois ci deux différentes rotations appliquées au pavé métallique : une de $\pi/9$ autour de l'axe vertical et une de $\pi/8$, telles que les pixels représentant les troncs soient d'intensité plus forte que la cible sur une image synthétisée par un algorithme SARC. Les figures 4.25 et 4.27 donnent les images SAR obtenues par l'algorithme SARC, SARSES et SARSESI dans la première et la seconde configuration. On ne représente pas les valeurs négatives des images obtenues avec l'algorithme SARSESI car ils correspondent à une "détection" de tronc, la valeur minimale représentée est 0. Cet algorithme ne sera pas étudié du point de vu des performances de détection empiriques car le détecteur qu'il utilise n'est pas CFAR (voir 2.2.3.2). On regardera dans quel mesure il supprime les pixels de fausse alarme correspondant aux troncs sans effacer la cible. Pour cela, on représente les figures 4.26 et 4.28 correspondant au nombre de fausses alarmes en fonction du seuil dans les images obtenues par les deux algorithmes SARSES et SARSESI pour les deux orientations de pavé considérées.

Les figures 4.25 et 4.27 illustrent l'intérêt de l'algorithme SARSESI. Les pixels correspondant aux troncs n'ont pas tous été effacés par l'algorithme, mais le niveau de ces pixels a globalement diminué, induisant une baisse du nombre de fausse alarme en fonction du seuil (figures 4.26 et 4.28). Visuellement, la cible ressort beaucoup mieux.

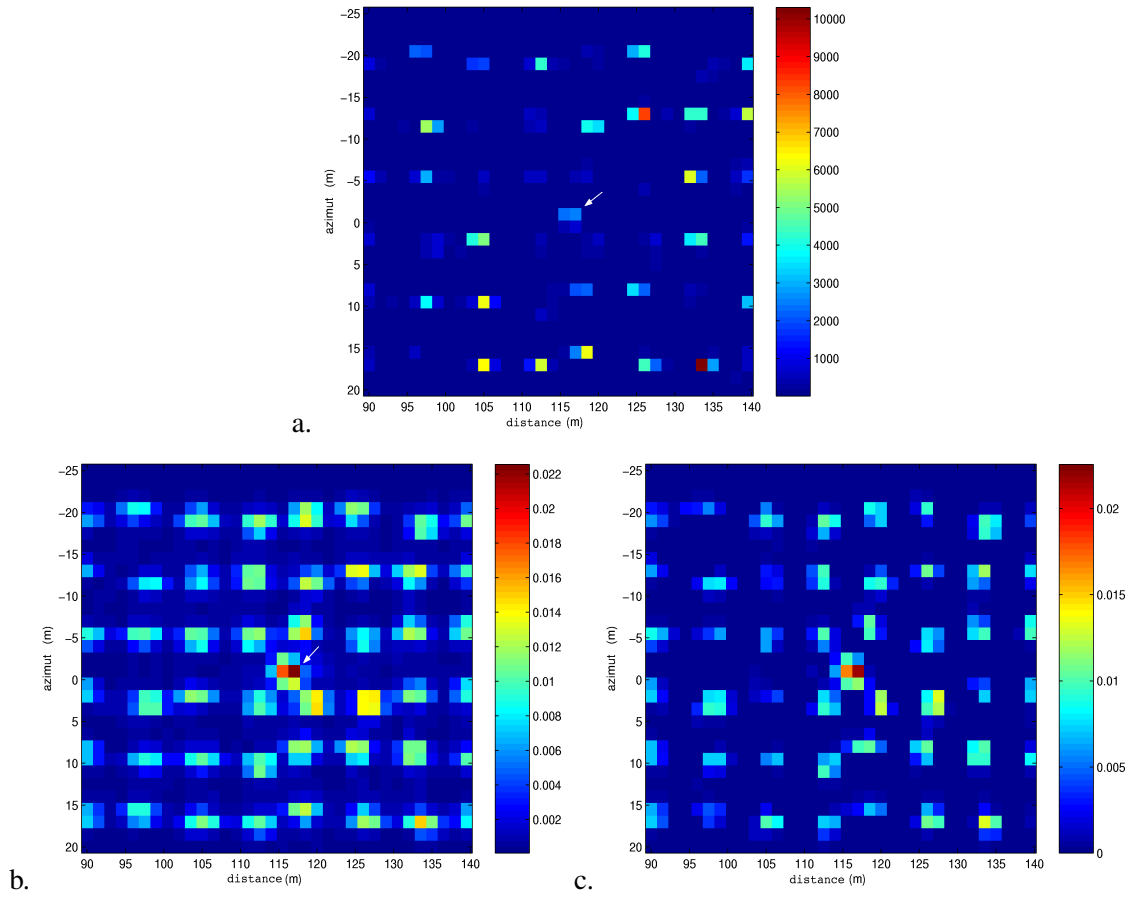


FIG. 4.25 – Pavé métallique dans la forêt ayant subi une rotation de $\pi/9$ autour de l'axe vertical : a. Image SARC, b. image SARSES dimension 10 variance inconnue, c. image SARSESI dimension sous espace signal : 10, interférence : 10, variance inconnue.

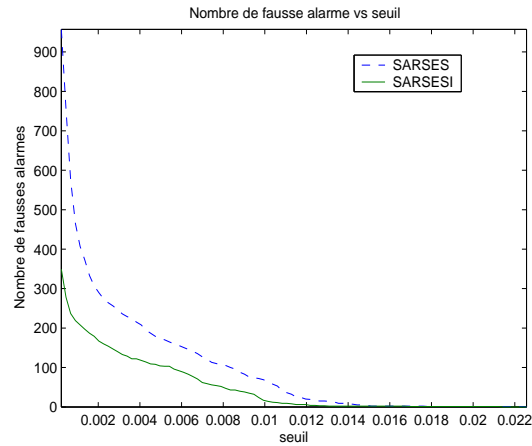


FIG. 4.26 – Nombre de fausses alarmes en fonction du seuil pour un pavé tourné de $\pi/9$ dans une forêt de troncs.

4.2. Performances de l'algorithme SARSESI en bande P

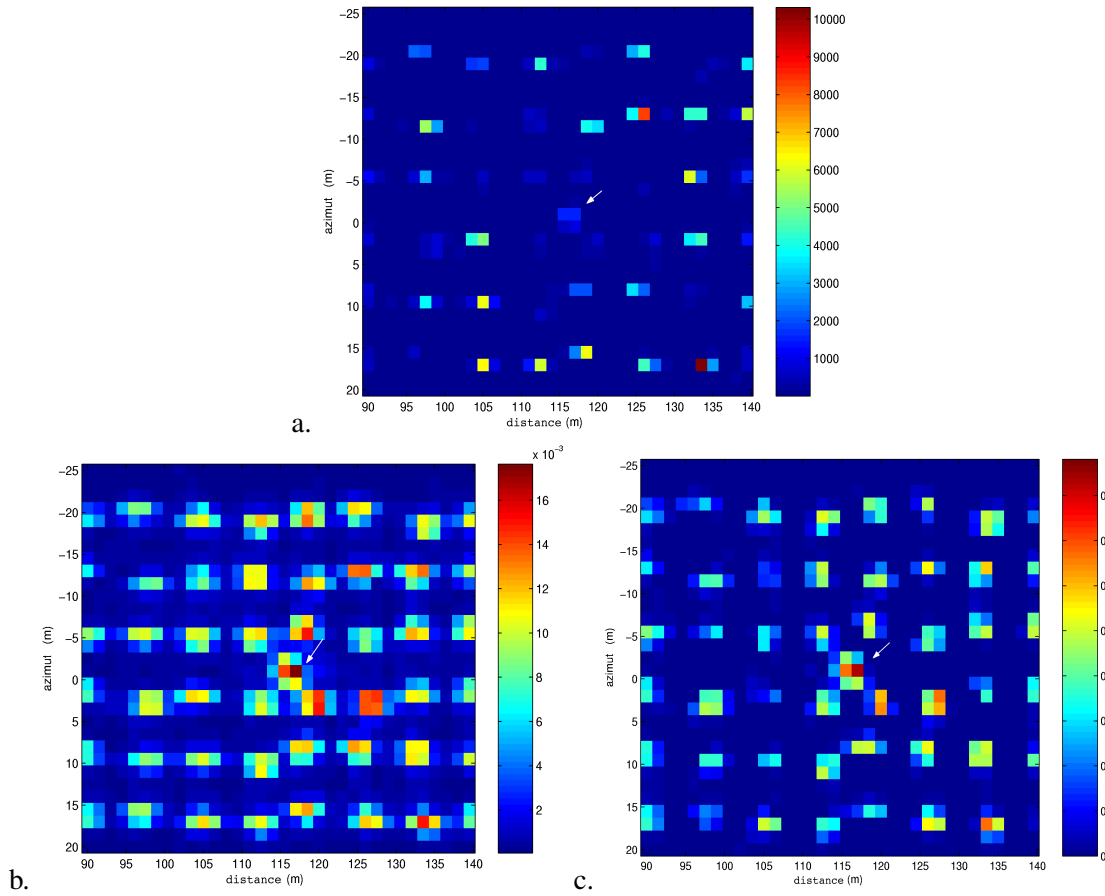


FIG. 4.27 – Pavé métallique dans la forêt ayant subi une rotation de $\pi/8$ autour de l'axe vertical : a. Image SARC, b. image SARSESI dimension 10 variance inconnue, c. image SARSESI dimension sous espace signal : 10, interférence : 10, variance inconnue.

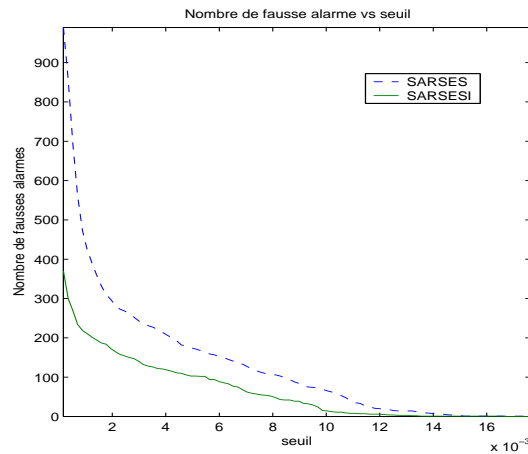


FIG. 4.28 – Nombre de fausses alarmes en fonction du seuil pour une pavé tourné de $\pi/8$ dans une forêt de troncs.

4.2.3.2 Données réelles

Le contexte est plus complexe que celui donné en 4.1.5.2. On cherche à détecter avec le moyen RAMSES en bande P dix huit cibles de quatre types différents (toutes des véhicules militaires). Ces véhicules sont disposés avec différentes orientations dans une forêt dense et humide (jour de pluie), ce qui contraste avec 4.1.5.2 où la forêt était majoritairement constituée de pins relativement espacés. La figure 4.29 présente l'emplacement des différentes cibles. Chaque couleur correspond à un type de cible, les zones vertes correspondent aux zones forestières.

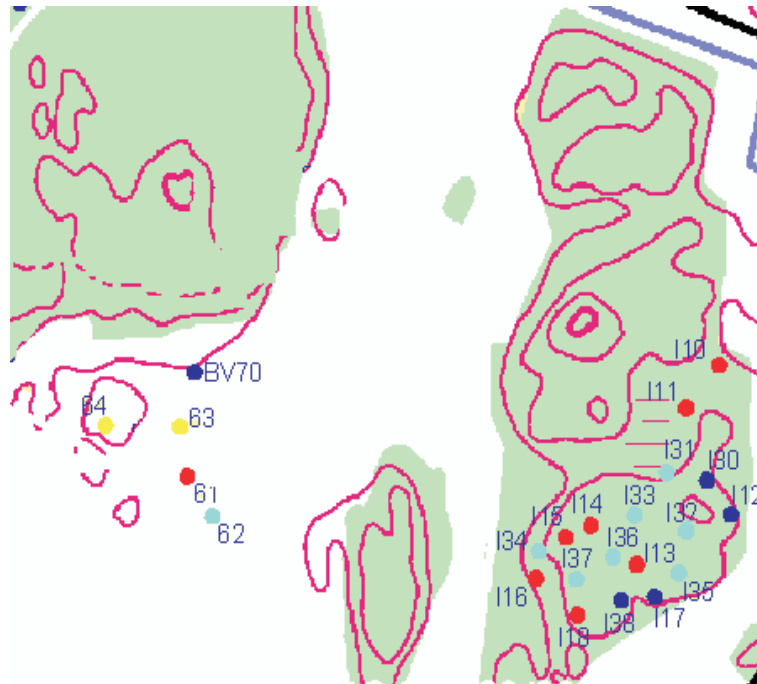


FIG. 4.29 – Déploiement des cibles dans la scène.

Nous analyserons dans cette partie trois acquisitions de données correspondant à trois vols différents séparés dans le temps mais suivant la même trajectoire. La figure 4.30 représente l'image obtenue avec un algorithme RMA correspondant à l'une de ces acquisitions. Les cercles blancs indiquent la position approximative des cibles.

Les figures 4.31 et 4.32 donnent les images obtenues avec les algorithmes SARSES, de sous espace signal de dimension 6, utilisant un modèle de plaque de 2×3 m, et SARSESI, de sous espace interférence de dimension 6, utilisant un modèle de cylindre de 20 m de hauteur et de 0.5 m de diamètre.

Les résultats obtenus sont moins spectaculaires qu'en 4.1.5.2. Il faut cependant relativiser et considérer la complexité de la scène. Comme nous l'avons dit précédemment, la forêt est très dense et très humide, l'acquisition ayant été effectuée un jour de pluie. La réflectivité de la végétation et le niveau des doubles rebonds sont donc très importants. Si on compare l'image obtenue avec le RMA à celle obtenue avec l'algorithme SARSES, le gain n'est pas flagrant, seules quelques cibles ressortent, le niveau relatif entre celles-ci et les fausses alarmes semble un peu meilleur dans certains cas. L'algorithme SARSESI semble avoir supprimé un grand nombre de fausses alarmes, bien que certaines d'entre elles subsistent. Quelques cibles dans les cercles blancs ou à proximité apparaissent clairement.

Pour quantifier plus rigoureusement l'apport des algorithmes, on représente les performances de chaque algorithme pour les trois vols. Celles-ci sont exprimées en terme de nombre de cibles détectées en fonc-

4.2. Performances de l'algorithme SARSESI en bande P

tion du nombre de fausses alarmes dans la figure 4.33. On considérera qu'une cible est détectée s'il se trouve un pixel dont l'intensité est au dessus du seuil fixé dans un rayon de 10 mètres autour de la position théorique de la cible (ce n'est pas une hypothèse "large"...). Une première observation encourageante est que les performances obtenues avec l'algorithme SARSESI sont bien meilleurs que celles obtenues par l'algorithme SARC pour les trois vols (un peu moins bonnes pour le vol 3). Les performances correspondant à l'algorithme SARSES sont assez mauvaises et du même ordre que celles de l'algorithme SARC. Tout au long des différents essais, on a cependant remarqué que les cibles plutôt grosses (type camion), ressemblant plus à un ensemble de plaques, étaient mieux détectées par l'algorithme SARSES. C'est cependant la suppression des fausses alarmes par l'algorithme SARSESI qui apporte le gain en performance le plus important.

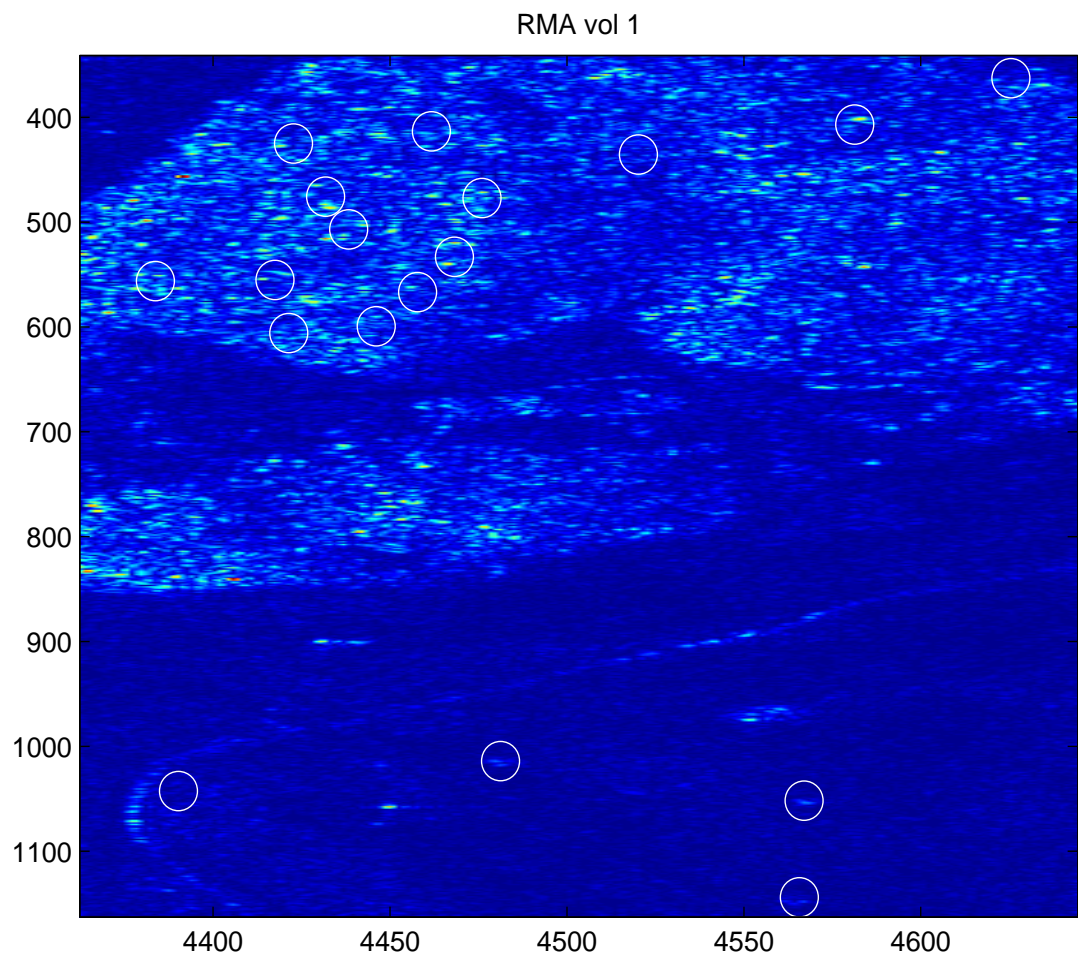


FIG. 4.30 – Image obtenue avec un RMA.

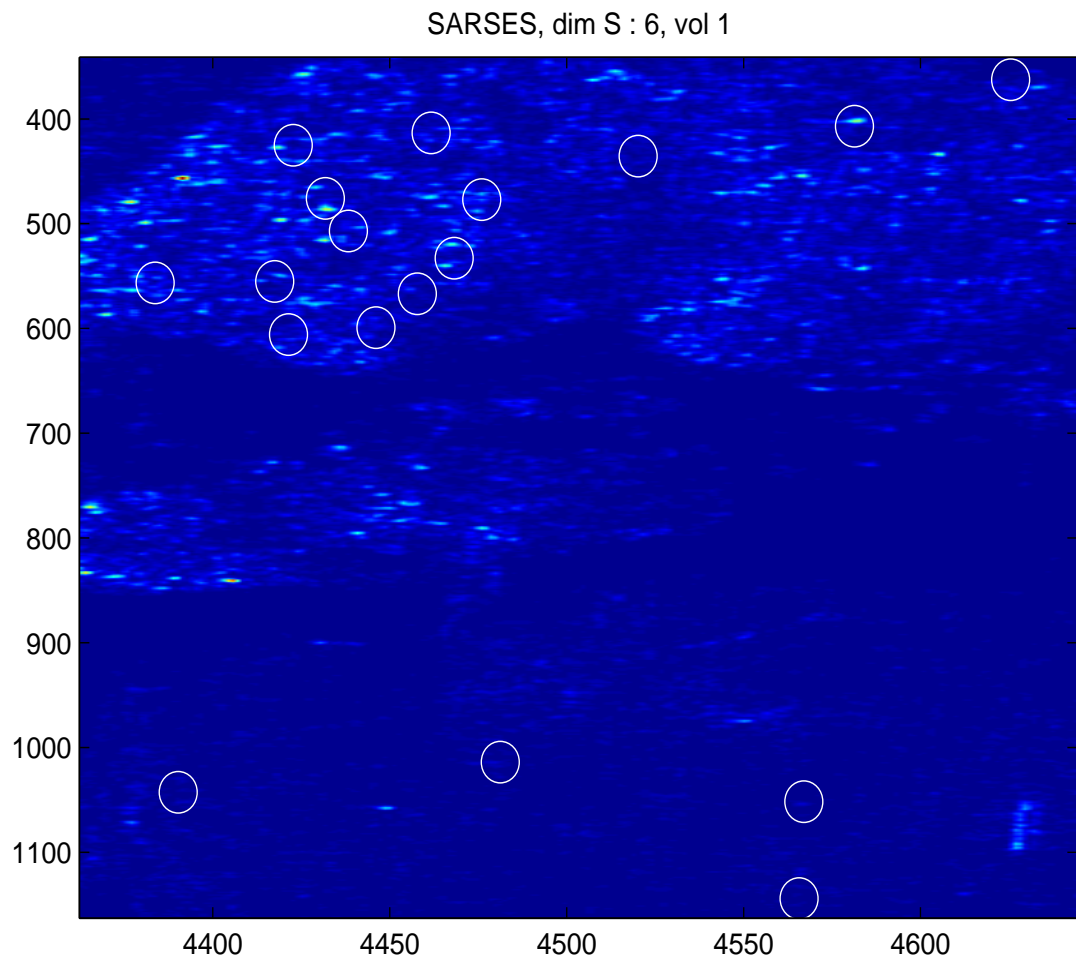


FIG. 4.31 – Image obtenue avec un algorithme SARSES.

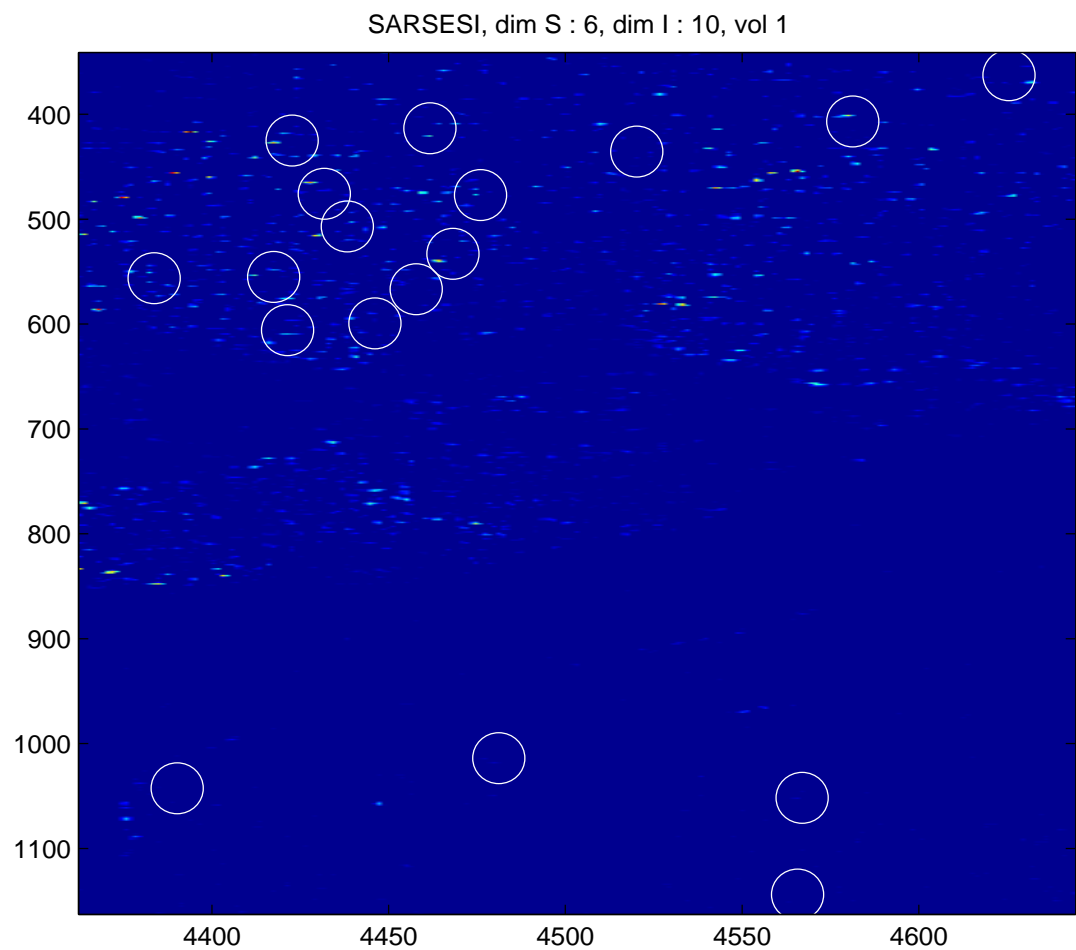


FIG. 4.32 – Image obtenue avec un algorithme SARSESI.

4.2. Performances de l'algorithme SARSESI en bande P

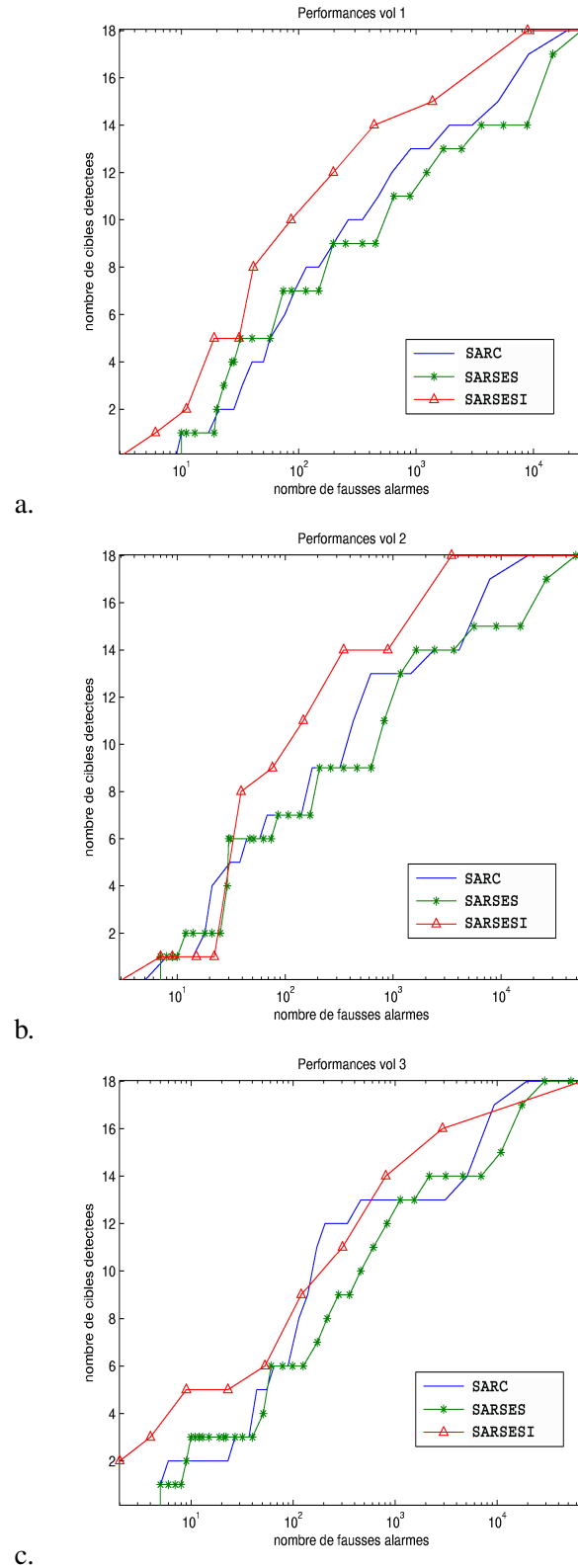


FIG. 4.33 – Nombre de cibles détectées en fonction du nombre de fausses alarmes pour les algorithmes RMA (-), SARSES (*) et SARSESI (\triangle), a. vol 1, b. vol 2, c. vol 3.

Conclusion et perspectives

Les algorithmes d'imagerie ou processeurs SAR classiques sont tous basés sur le modèle du point isotrope. Cette hypothèse pose que chaque diffuseur présent sur la scène à imager se comporte comme un point isotrope et rétrodiffuse le signal émis de la même façon, quelque soit l'angle d'incidence de l'onde émise ou l'orientation du diffuseur. Dans le contexte de la détection de cibles manufacturées, cette hypothèse est mise en défaut par le comportement souvent directif des cibles. Elle ne permet pas de tirer parti des informations physiques propres à la cible pour la distinguer de l'environnement dans lequel elle se situe et ainsi mieux la détecter. Cette thèse utilise de nouvelles hypothèses sur la structure des cibles pour développer de nouveaux processeurs SAR spécialisés dans la détection d'objets manufacturés. Un objet manufacturé est décrit avec plus de justesse comme un ensemble d'éléments canoniques d'orientation inconnue. Si le signal rétrodiffusé par cet élément canonique, quelque soit son orientation, appartient à un sous espace de petite dimension, on peut développer un processeur SAR basé sur des détecteurs de ce sous espace. Ce processeur est appelé algorithme SAR à Sous Espace Signal ou SARSES.

Dans un contexte de détection où la cible se trouve dans un environnement de diffuseurs connus générant des interférences fortes et donc de nombreuses fausses alarmes, il peut être intéressant de modéliser la réponse électromagnétique de ces diffuseurs pour mieux les supprimer de l'image formée. Là encore, si l'ensemble des réponses du modèle choisi appartient à sous espace de petite dimension, on peut développer un processeur SAR basé sur des détecteurs de sous espace. Ce processeur est appelé algorithme SAR à Sous Espace Signal ou Interférence ou SARSESI.

Les différents moyens d'implémenter les algorithmes SARSES et SARSESI ainsi que leurs performances théoriques ont été étudiés en détail. Ils ont ensuite été testés et comparés sur des données simulées et réelles.

1 Conclusion

Le premier chapitre est consacré à la présentation du SAR du point de vue système et formation d'image. Une grande partie des configurations, des modes de fonctionnement et des types de modélisation sont décrits. Trois algorithmes classiques de formation d'image sont introduits : le Time Domain Correlation Algorithm (TDCA), l'algorithme de Backprojection et le Range Moving Algorithm (RMA). Malgré leurs différences, ces processeurs forment des images équivalentes : la modélisation des cibles qu'ils considèrent est identique puisqu'ils supposent tous que les diffuseurs à représenter sont des points isotropes.

On montre dans ce chapitre qu'en introduisant un problème de détection à deux hypothèses, l'une posant qu'à une position donnée, le signal rétrodiffusé est du bruit blanc Gaussien, l'autre un point isotrope plus du bruit blanc Gaussien, le Rapport de Vraisemblance Généralisé (RVG) correspondant à ce problème est équivalent à l'intensité trouvée à la même position par un processeur SAR classique. En

imposant un seuil constant sur l'intensité des pixels d'une image SAR, on peut assimiler un processeur SAR à un détecteur de points isotropes.

Pour des applications de détection de cibles manufacturées, l'hypothèse de décomposition en points isotropes est éloignée de la réalité physique des cibles. Dans le chapitre 2, on suppose dans un premier temps qu'une cible manufacturée est décrite avec plus de justesse comme un ensemble d'éléments canoniques d'orientation variée dans du bruit blanc Gaussien. Un nouveau problème de détection est donc récrit basé sur cette hypothèse : à une position donnée, le signal rétrodiffusé est soit du bruit blanc Gaussien, soit un élément canonique d'orientation inconnue plus du bruit blanc Gaussien. Si l'ensemble des signaux rétrodiffusés par l'élément canonique quelque soit son orientation appartient à un sous espace de petite dimension, appliquer un Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (TRVG) sur ce problème donne un détecteur de Sous Espace Signaux (SES) qui est étudié en détail. Dans un second temps, on considère une cible dans un milieu où des interférences sont causées par des diffuseurs connus. Le problème de détection considéré va donc se compliquer par rapport au précédent : on suppose qu'à une position donnée, le signal reçu est soit le signal rétrodiffusé par un diffuseur interférant d'orientation inconnue plus du bruit blanc Gaussien soit celui rétrodiffusé par un élément canonique constitutif de la cible plus du bruit blanc Gaussien. Là encore, si les ensembles des signaux rétrodiffusés par le diffuseur interférant et par l'élément canonique appartiennent à des sous espaces de petite dimension, appliquer un TRVG aboutit à un nouveau détecteur à Sous Espace Signal ou Interférence (SESI). Ce détecteur est lui aussi étudié en détail dans ce chapitre.

Le chapitre 3 exploite les deux détecteurs SES et SESI pour créer deux nouveaux processeurs SAR. Pour chaque nouveau pixel à générer, ces processeurs utilisent le RVG de ces détecteurs comme intensité et créent ainsi une image. Les deux processeurs sont appelés algorithmes SARSES (basé sur le détecteur SES) et SARSESI (basé sur le détecteur SESI). Ce chapitre traite en particulier de l'implémentation et de l'optimisation de ces deux algorithmes.

Afin de générer les sous espaces signal et interférence nécessaires à nos deux algorithmes, on génère pour chacun d'eux une matrice contenant l'ensemble des réponses de l'élément modèle, quelque soit son orientation. On applique ensuite une décomposition en valeurs singulières ou Singular Value Decomposition (SVD) sur ces matrices. Une base du sous espace cherché est constituée des vecteurs singuliers gauches associés aux valeurs singulières non nulles. Cette méthode de génération des sous espaces pose de nombreux problèmes de temps de calcul : il faut calculer la SVD d'une matrice de très grande dimension et répéter cette opération autant de fois qu'il y a de pixels à représenter. En l'état, les algorithmes sont inutilisables. On propose donc de réduire le temps de calcul lié à ces opérations en compressant les matrices signal à décomposer puis en montrant qu'on peut retrouver simplement toutes les bases de sous espace que l'on cherche à partir d'une seule SVD. Ces deux opérations combinées permettent d'appliquer nos algorithmes aussi bien en simulations que sur données réelles. Une autre partie de ce chapitre propose deux nouveaux algorithmes SARSES et SARSESI exploitant, à l'image de l'algorithme Back-projection, les filtrages adaptés pour réduire la complexité de l'algorithme. En plus de la réduction de complexité, ces algorithmes ont pour avantage de n'exploiter que le signal compressé (c'est à dire le signal reçu après filtrage adapté par le signal émis). Cette propriété a été nécessaire lors du traitement de certaines données réelles.

Le chapitre 4, dernier chapitre de ce manuscrit, contient l'ensemble des résultats obtenus en appliquant les algorithmes SARSES et SARSESI en bande P (autour de 400 MHz). On pose qu'une cible manufacturée se décompose comme un ensemble de plaques. Plusieurs aspects sont traités : tout d'abord la validation de l'ensemble des critères nécessaires au bon fonctionnement des algorithmes, ensuite le

calcul des performances de des algorithmes en considérant d'abord des scènes simulées avec une cible manufacturée dans du bruit blanc Gaussien, puis dans une forêt et finalement des données réelles mesurées par l'ONERA. Les performances en terme de détection de l'algorithme SARSES dans du bruit blanc Gaussien dépassent nettement celles d'un algorithme SAR Classique (SARC) lorsque l'on considère des cibles faites de plaques. La capacité de l'algorithme à différencier des troncs d'arbres d'une cible manufacturée est illustrée par les simulations dans la forêt : l'algorithme SARSES fait ressortir la cible par rapport aux troncs. Finalement dans le cas des données réelles (un camion dans une forêt), la cible, à peine visible sur l'image SARC, ressort nettement sur les images SARSES.

Les résultats obtenus sont donc très encourageants, mais on ne doit pas pour autant penser que quelque soit la configuration envisagée, la détection sera aisée. Si la cible est orientée de telle façon que son lobe principal de rétrodiffusion n'est pas orienté en direction de l'antenne synthétique ou si la forêt considérée est très dense et humide, le rapport signal à clutter sera tel qu'il sera compliqué de séparer la cible des fausses alarmes. L'algorithme SARSESI a été développé pour ces configurations là. Dans la forêt, on suppose que la plupart des fausses alarmes viennent des troncs que l'on modélise par des cylindres diélectriques. Le sous espace interférence est déterminé à partir de ce modèle. Les résultats obtenus sur simulation montrent que le niveau des fausses alarmes diminue sur une image générée par l'algorithme SARSESI par rapport à ceux d'une image générée par un algorithme SARSES, sans baisser de façon trop importante le niveau de la cible. Cette tendance est confirmée sur données réelles.

Comme l'illustrent les résultats sur données réelles dans la partie 4.2.3.2, les performances, bien que meilleures que dans le cas du SAR classique doivent encore nettement être améliorées pour distinguer nettement les cibles des fausses alarmes. Un certain nombre de propositions sont donc faites dans la partie suivante pour essayer d'y parvenir.

2 Perspectives

On peut diviser les perspectives liées à ce travail de thèse en deux catégories : les évolutions possibles des algorithmes et les différentes applications que l'on peut dériver.

2.1 Evolutions de l'algorithme

Du point de vue des évolutions possibles des algorithmes, une étude à été initiée au sein du laboratoire SONDRRA et du GEA pour intégrer l'information polarimétrique des cibles (et interférence) dans le problème de détection. Actuellement, les algorithmes n'utilisent le signal rétrodiffusé par un modèle que pour une polarisation donnée (que ce soit VV ou HH). Un algorithme exploitant simultanément tous les canaux de polarisations améliorerait certainement les performances de détection. Pour que cette méthode fonctionne au mieux, il faut bien sûr que le modèle choisi pour décrire la cible à détecter soit proche de la réalité et il serait préférable qu'il ait une réponse sur tous les canaux de polarisation afin d'apporter un maximum d'information (ce n'est pas le cas d'une plaque métallique qui n'a pas de réponse en polarisation croisée HV ou VH).

On pourrait compliquer le modèle de bruit utilisé et ne plus le considérer comme blanc Gaussien, mais comme coloré (voire des bruits non Gaussien). Cette modélisation pose le problème de l'estimation de la matrice de covariance du bruit avec des signaux SAR. Comment obtenir les données secondaires (réponse du bruit sans la cible) nécessaires ? On pourrait s'inspirer de [32] et de la dépendance en distance des données pour créer ces données secondaires.

Conclusion et perspectives

Les algorithmes pourraient être étendus à des configurations multistatistiques : exploiter la variété de diffusion de la cible pourrait donner des résultats intéressants. Bien sûr, considérer du multistatisme modifie complètement les modèles utilisés par les algorithmes de base et les optimisations effectuées dans la configuration monostatique deviennent caduques !

La problématique d'identification et de classification des cibles n'a pas été abordée dans cette thèse. Elle pourrait être possible soit en estimant l'orientation des formes détectées pour recréer une image (assez grossière) de la cible, soit en créant des bases de données de sous espaces de cibles particulières.

Aucun traitement d'image spécifique n'est appliqué sur les images formées par les nouveaux algorithmes. Ces images pourraient certainement être améliorées en termes de contraste cible/clutter par des traitements adaptés à la statistique de l'image ou aux formes des cibles.

2.2 Autres applications possibles

Du point de vue des applications possibles, la détection de mines enfouies avec du SAS (Synthetic Aperture Sonar) semble être un sujet particulièrement adapté aux algorithmes SARSES et SARSESI : une forme bien déterminée orientée de façon inconnue à détecter dans un fort clutter.

De même pour la détection de cibles sur le sol :

- la détection d'un avion stationné sur un aéroport à certaines fréquences peut être compliquée, la rugosité du sol pouvant créer un clutter important.
- La détection de véhicule dans un désert de sable (ou autre) pose de nombreux problèmes.

Les algorithmes SARSES et SARSESI sont des algorithmes de traitement d'antenne synthétique mais aussi de traitement d'antenne. Il pourrait être intéressant d'appliquer cet algorithme en utilisant un large réseau d'antennes ou plusieurs réseaux (ce qui rejoindrait les problématiques du multistatique).

Annexe A

Calcul de distributions en χ^2

A.1 Calcul de la distribution de la différence de deux χ^2

Soit la variable aléatoire $f(\mathbf{z})$ s'écrivant sous la forme :

$$f(\mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.1})$$

Où, \mathbf{z} est $CN(\mathbf{m}, \sigma^2 \mathbf{I})$, avec $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M \times D_H}$ et $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{M \times D_J}$ sont deux matrices orthogonales engendrant deux sous espaces $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$.

On voudrait calculer la distribution de $f(\mathbf{z})$. On considérera deux cas : dans le premier cas, on émettra l'hypothèse que les sous espaces $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$ sont orthogonaux, dans le second, on considérera le cas général où les deux sous espaces ne sont pas orthogonaux. On considérera \mathbf{P}_H et \mathbf{P}_J les deux projecteurs orthogonaux sur $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$ définis par :

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{P}_J = \mathbf{J} \mathbf{J}^\dagger \quad (\text{A.3})$$

– $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$ orthogonaux :

Si $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$ sont orthogonaux, alors on a : $\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H \mathbf{z}$ et $\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_J \mathbf{z}$ deux variables aléatoires indépendantes. On a donc :

$$f(\mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\sim \chi^2(2D_H, \frac{\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) - \chi^2(2D_J, \frac{\|\mathbf{J}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) \quad (\text{A.5})$$

Une méthode pour calculer la distribution de la différence entre deux combinaisons linéaires de χ^2 indépendants est donnée dans [16].

– $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$ ne sont pas orthogonaux :

Si $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$ ne sont pas orthogonaux, on n'a plus $\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H \mathbf{z}$ et $\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_J \mathbf{z}$ deux variables aléatoires indépendantes. Il faut donc exprimer différemment la différence de ces deux variables afin de n'avoir que des combinaisons linéaires de variables indépendantes.

Posons :

$$\mathbf{G} = [\mathbf{H} \ \mathbf{J}] \quad (\text{A.6})$$

Annexe A. Calcul de distributions en χ^2

Si on effectue une décomposition en valeurs singulières sur la matrice \mathbf{G} , alors :

$$\mathbf{G} = [\mathbf{W} \mathbf{W}^\perp] \Sigma \mathbf{V}^\dagger \quad (\text{A.7})$$

Où $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{M \times D_W}$ correspond aux vecteurs singuliers gauches associés aux valeurs singulières non nulles de Σ . La matrice \mathbf{W} est une base orthonormée décrivant le sous espace $\langle W \rangle$. Soit $\mathbf{P}_W = \mathbf{W} \mathbf{W}^\dagger$, le projecteur orthogonal sur $\langle W \rangle$. On a :

$$\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}^\dagger \mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H \mathbf{z} - \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_J \mathbf{z} \quad (\text{A.8})$$

$$= \mathbf{z}^\dagger (\mathbf{P}_W + \mathbf{P}_W^\perp) (\mathbf{P}_H - \mathbf{P}_J) (\mathbf{P}_W + \mathbf{P}_W^\perp) \mathbf{z} \quad (\text{A.9})$$

$$= \mathbf{z}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{W}^\dagger (\mathbf{P}_H - \mathbf{P}_J) \mathbf{W} \mathbf{W}^\dagger \mathbf{z} \quad (\text{A.10})$$

Posons $\mathbf{w} = \mathbf{W}^\dagger \mathbf{z}$ et $\mathbf{R} = \mathbf{W}^\dagger \mathbf{P}_H \mathbf{W} - \mathbf{W}^\dagger \mathbf{P}_J \mathbf{W}$. \mathbf{R} est hermitienne et diagonalisable. Sa décomposition en valeur propre peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \Lambda \mathbf{A}^\dagger = \sum_{k=1}^{D_W} \lambda_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^\dagger \quad (\text{A.11})$$

avec $\lambda_k > 0$ pour $k \in [1, l]$ et $\lambda_k < 0$ pour $k \in [l+1, D_W]$.

En reprenant l'équation (A.10), on obtient :

$$\frac{\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^{D_W} \lambda_k \frac{|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{w}|^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.12})$$

\mathbf{w} est $CN(\mathbf{W}^\dagger \mathbf{m}, \sigma^2 \mathbf{I})$, donc pour tout k , $\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{w}$ est $CN(\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{W}^\dagger \mathbf{m}, \sigma^2 \mathbf{I})$. A partir de cette observation et de l'équation (A.12), on a :

$$f(\mathbf{z}) \sim \sum_{k=1}^{D_W} \frac{\lambda_k}{2} \chi^2(2, \frac{2\|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{W}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) \quad (\text{A.13})$$

$$\sim \sum_{k=1}^l \frac{\lambda_k}{2} \chi^2(2, \frac{2\|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{W}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) - \sum_{j=l+1}^{D_W} \frac{|\lambda_j|}{2} \chi^2(2, \frac{2\|\mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{W}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) \quad (\text{A.14})$$

On a donc bien $f(\mathbf{z})$ distribué comme une différence de deux χ^2 indépendants. Une méthode numérique pour calculer cette distribution est donnée dans [16].

A.2 Calcul d'une probabilité d'un rapport de différence de χ^2

Considérons une variable aléatoire $f_1(\mathbf{z})$ de la forme :

$$f_1(\mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{J}^\dagger \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}\|^2} \quad (\text{A.15})$$

Où \mathbf{z} est $CN(\mathbf{m}, \sigma^2 \mathbf{I})$, $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M \times D_H}$ et $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{M \times D_J}$ deux bases orthonormées des sous espace $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$. Soit $\mathbf{P}_H = \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger$ et $\mathbf{P}_J = \mathbf{J} \mathbf{J}^\dagger$ deux projecteurs orthogonaux sur $\langle H \rangle$ et $\langle J \rangle$.

$$f_1(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H \mathbf{z} - \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_J \mathbf{z}}{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}} \quad (\text{A.16})$$

A.2. Calcul d'une probabilité d'un rapport de différence de χ^2

On veut calculer la probabilité P_r suivante :

$$P_r = P(f_1(\mathbf{z}) > \eta) \quad (\text{A.17})$$

$$= P\left(\frac{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H \mathbf{z} - \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_J \mathbf{z}}{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}} > \eta\right) \quad (\text{A.18})$$

Où η est un seuil donné. Considérons deux cas :

– Si $\langle H \rangle^\perp$ et $\langle J \rangle^\perp$ sont orthogonaux :

$\langle H^\perp \rangle$ et $\langle J^\perp \rangle$ sont orthogonaux, or d'après l'Eq. 2.59 :

$$\tilde{f}(\mathbf{z}) = \frac{\|\mathbf{P}_J^\perp \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}\|^2} - 1 \quad (\text{A.19})$$

Avec $\|\mathbf{P}_J^\perp \mathbf{z}\|^2$ et $\|\mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}\|^2$ deux variables aléatoires indépendantes et :

$$\frac{\|\mathbf{P}_J^\perp \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \sim \frac{1}{2} \chi^2(2(M - D_J), 2 \frac{\|\mathbf{J}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\|\mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \sim \frac{1}{2} \chi^2(2(M - D_H), 2 \frac{\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) \quad (\text{A.21})$$

De plus :

$$P(f(\mathbf{z}) > \eta) = P\left(f\left(\frac{M - D_H}{M - D_J}(f(\mathbf{z}) - 1)\right) > \frac{M - D_H}{M - D_J}(\eta - 1)\right) \quad (\text{A.22})$$

Avec $\frac{M - D_H}{M - D_J}(f(\mathbf{z}) - 1)$ suivant la F -distribution doublement décentrée, $F(2(M - D_J), 2(M - D_H), 2 \frac{\|\mathbf{J}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}, 2 \frac{\|\mathbf{H}^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2})$. Une méthode numérique pour calculer ce type de distribution est donnée dans [17].

– Si $\langle H \rangle^\perp$ et $\langle J \rangle^\perp$ ne sont pas orthogonaux :

L'équation (A.18) est équivalente à :

$$P_r = P\left(\frac{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H \mathbf{z} - \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_J \mathbf{z} - \eta \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}}{\sigma^2} > 0\right) \quad (\text{A.23})$$

Soit $f_2(\mathbf{z}, \eta)$ la variable aléatoire suivante :

$$f_2(\mathbf{z}, \eta) = \frac{\mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H \mathbf{z} - \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_J \mathbf{z} - \eta \mathbf{z}^\dagger \mathbf{P}_H^\perp \mathbf{z}}{\sigma^2} \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{\mathbf{z}^\dagger ((1 + \eta) \mathbf{P}_H - \mathbf{P}_J - \eta \mathbf{I}) \mathbf{z}}{\sigma^2} \quad (\text{A.25})$$

$$(\text{A.26})$$

Posons \mathbf{R} la matrice telle que :

$$\mathbf{R} = (1 + \eta) \mathbf{P}_H - \mathbf{P}_J - \eta \mathbf{I} \quad (\text{A.27})$$

Annexe A. Calcul de distributions en χ^2

La matrice \mathbf{R} est hermitienne est donc diagonalisable. On a donc :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{A}^\dagger = \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^\dagger \quad (\text{A.28})$$

Avec $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ matrice orthonormée contenant les vecteurs propres \mathbf{a}_k et $\mathbf{\Lambda}$ matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_k .

On a donc finalement :

$$f_2(\mathbf{z}, \eta) = \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{z}|^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.29})$$

$$= \sum_{k=1}^l \lambda_k \frac{|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{z}|^2}{\sigma^2} - \sum_{j=l+1}^M |\lambda_j| \frac{|\mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{z}|^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.30})$$

$$\sim \sum_{k=1}^l \frac{\lambda_k}{2} \chi^2(2, 2 \frac{\|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) - \sum_{j=l+1}^M \frac{|\lambda_j|}{2} \chi^2(2, 2 \frac{\|\mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) \quad (\text{A.31})$$

Où l correspond au nombre de valeurs propres positives de $\mathbf{\Lambda}$. $f_2(\mathbf{z})$ est donc une différence de combinaisons linéaires de χ^2 indépendants. Une méthode numérique pour calculer cette distribution est donnée dans [16]. Pour résumé, on a donc :

$$P(f_1(\mathbf{z}) > \eta) = P(f_2(\mathbf{z}, \eta) > 0) \quad (\text{A.32})$$

Avec :

$$f_2(\mathbf{z}, \eta) \sim \sum_{k=1}^l \frac{\lambda_k}{2} \chi^2(2, 2 \frac{\|\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) - \sum_{j=l+1}^M \frac{|\lambda_j|}{2} \chi^2(2, 2 \frac{\|\mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{m}\|^2}{\sigma^2}) \quad (\text{A.33})$$

Annexe B

Modélisation des signaux SAR

Posons $e_c(t)$ le signal temporel émis durant une période T_e . Le signal émis peut aussi s'écrire sous la forme $e(t)$:

$$e(t) = \begin{cases} e_c(t) & \text{si } t \in [0, T_e] \\ 0 & \text{si } t > T_e \text{ où } t < 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Soit $\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_V \\ p_H \end{bmatrix}$ la polarisation de l'onde émise portant le signal : $p_V = 1$ et $p_H = 0$ correspond à une polarisation verticale, $p_V = 0$ et $p_H = 1$ correspond à une polarisation horizontale, $p_V = 1$ et $p_H = 1$ correspond au cas "full polar" où les deux polarisations sont émises simultanément. Soit $E(f)$ la transformée de Fourier de $e(t)$.

B.1 Modélisation de la diffusion d'un signal monochromatique

Dans cette partie, on suppose que $e(t)$ est une onde plane monochromatique. Sa transformée de Fourier $E(f)$ est :

$$E(f) = \begin{cases} E(f_0)\delta(f - f_0) & \text{si } f = f_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Considérons que \mathbf{r}_r est le vecteur position référençant l'antenne dans une base d'origine 0. \mathbf{r}_c est le vecteur position du diffuseur dans la même base. Le diffuseur est éclairé par une onde plane incidente émise par l'antenne. On se place dans la configuration champ lointain. L'amplitude du champ incident $E_i(f)$ sur le diffuseur est donnée dans [30] par :

$$E_i(f) = E(f) \cdot \exp(-jk_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_c)) \quad (\text{B.3})$$

où $k_0 = \frac{\omega_0}{c} = 2\pi \frac{f_0}{c}$ est le nombre d'onde, f_0 est la fréquence du signal émis. Le vecteur unitaire \mathbf{i} le vecteur unitaire indique le sens de la direction de propagation de l'onde incidente.

On peut récrire (B.3) comme suit :

$$E_i(f) = E(f) \cdot \exp(-jk_0 R) \quad (\text{B.4})$$

avec $R = \|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_c\|$ la distance entre l'antenne et le diffuseur (car \mathbf{i} colinéaire à $(\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_c)$ en champ lointain). Le signal rétrodiffusé $E_s(f) = \begin{bmatrix} E_{S_V}(f) \\ E_{S_H}(f) \end{bmatrix}$ à la position de l'antenne est :

$$\begin{bmatrix} E_{S_V}(f) \\ E_{S_H}(f) \end{bmatrix} = \frac{\exp(-jk_0 R)}{R} \mathbf{S}_{\mathbf{f}_0} \hat{\mathbf{p}} E_i(f) \quad (\text{B.5})$$

où $\mathbf{S}_{\mathbf{f}_0} = \begin{bmatrix} s_{VV}(f_0) & s_{VH}(f_0) \\ s_{HV}(f_0) & s_{HH}(f_0) \end{bmatrix}$ est la matrice de diffusion à la fréquence f_0 du diffuseur placé à \mathbf{r}_c , pour une incidence donnée de l'onde plane. Les termes de la matrice de diffusion $s_{VV}(f_0)$, $s_{HH}(f_0)$, $s_{HV}(f_0)$ et $s_{VH}(f_0)$ dépendent aussi d'autres paramètres tels que l'orientation du diffuseur. Cependant on ne considère pas ces paramètres pour le moment. Dans le cas de la rétrodiffusion, $\mathbf{s} = -\mathbf{i}$ et $E_s(f)$ peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} E_{S_V}(f) \\ E_{S_H}(f) \end{bmatrix} = E(f) \frac{\exp(-j2k_0 R)}{R} \mathbf{S}_{\mathbf{f}_0} \hat{\mathbf{p}} \quad (\text{B.6})$$

Finalement, on a :

$$\begin{bmatrix} e_{S_V}(t) \\ e_{S_H}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{TF}^{-1}[E_{S_V}(f)] \\ \text{TF}^{-1}[E_{S_H}(f)] \end{bmatrix} = e(t) \frac{\exp(-j2k_0 R)}{R} \mathbf{S}_{\mathbf{f}_0} \hat{\mathbf{p}} \quad (\text{B.7})$$

B.2 Modélisation de la diffusion d'un signal large bande

Considérons désormais que $e(t)$ est un signal large bande, on peut l'écrire comme suit :

$$e(t) = \text{TF}^{-1}(E(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(f_i) \exp(j2\pi f_i t) df_i \quad (\text{B.8})$$

On peut considérer que $e(t)$ est une somme continue d'ondes monochromatiques $e_i(t)$ où chaque transformée de Fourier $E_i(f)$ est :

$$E_i(f) = \begin{cases} E(f_i) \delta(f - f_i) & \text{si } f = f_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

D'après les équations (B.6) et (B.8) on écrit :

$$\begin{bmatrix} e_{S_V}(t) \\ e_{S_H}(t) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(f_i) \frac{\exp(-j2k_i R)}{R} \mathbf{S}_{\mathbf{f}_i} \hat{\mathbf{p}} \exp(j2\pi f_i t) df_i \quad (\text{B.10})$$

avec $k_i = 2\pi \frac{f_i}{c}$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} e_{S_V}(t) &= \text{TF}^{-1} \left[E(f) \frac{\exp(-j2kR)}{R} (p_V s_{VV}(f) + p_H s_{VH}(f)) \right] \\ e_{S_H}(t) &= \text{TF}^{-1} \left[E(f) \frac{\exp(-j2kR)}{R} (p_V s_{HV}(f) + p_H s_{HH}(f)) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

B.3 Décalage en bande de base

Afin de traiter le signal reçu, on doit passer le signal en bande de base. On pose :

$$c_X(f) = p_V s_{XV}(f) + p_H s_{XH}(f), \quad (\text{B.12})$$

où X est soit H soit V . Si B est la largeur de bande du signal et f_0 sa fréquence centrale. On a :

$$\tilde{c}_X(f) = \begin{cases} c_X(f) & \text{si } f \in [f_0 - B/2, f_0 + B/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

D'après les équations (B.11) et (B.13), on obtient :

$$e_{S_X}(t) = \text{TF}^{-1} \left[E(f) \frac{\exp(-j2\pi f\tau)}{R} \tilde{c}_X(f) \right] \quad (\text{B.14})$$

où $\tau = \frac{2}{c}R$ correspond au temps de propagation aller-retour entre l'antenne et le diffuseur. Soit $e_{S_{bb}}(t)$ le signal reçu $e_{S_X}(t)$ en bande de base :

$$\begin{aligned} e_{S_{bb}}(t) &= e_{S_X}(t) \exp(-j2\pi f_0 t) \\ \text{TF}[e_{S_{bb}}(t)] &= E_{S_{bb}}(f) = \text{TF}[e_{S_X}(t)] * \delta(f + f_0) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Soit $e_{bb}(t)$ le signal émis $e(t)$ en bande de base.

$$\begin{aligned} e_{bb}(t) &= e(t) \exp(-j2\pi f_0 t) \\ \text{TF}[e_{bb}(t)] &= E_{bb}(f) = \text{TF}[e(t)] * \delta(f + f_0) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

On définit aussi une écriture de $c_X(f)$ en bande de base : $c_{bb}(f)$

$$c_{bb}(f) = \tilde{c}_X(f) * \delta(f + f_0) = \begin{cases} c_X(f + f_0) & \text{si } f \in [-B/2, +B/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

On veut exprimer $e_{S_{bb}}(t)$ comme une fonction de $e_{bb}(t)$:

$$e_{S_{bb}}(t) = \text{TF}^{-1} \left[E(f) \frac{\exp(-j2\pi f\tau)}{R} \tilde{c}_X(f) \right] \exp(-j2\pi f_0 t) \quad (\text{B.18})$$

$$= \left[\text{TF}^{-1} [E_{bb}(f) c_{bb}(f)] \frac{\exp(-j2\pi f_0 \tau)}{R} \right] * \delta(t - \tau) \quad (\text{B.19})$$

B.4 Analyse numérique

Dans cette partie, on travaille uniquement sur les signaux échantillonnés en bande de base. Soit F_s la fréquence d'échantillonnage et T_s la période d'échantillonnage. Soit \mathbf{y} le vecteur contenant les échantillons de $e_{S_{bb}}(t)$.

$$y(n) = e_{S_{bb}}(nT_s) \quad (\text{B.20})$$

Si on considère que le signal est reçu pendant une période T_r , on peut écrire \mathbf{y} comme :

$$\mathbf{y} = \left[\mathbf{0}_{\lceil \tau F_s \rceil}^T \left[\text{TFN}^{-1} [\text{diag}(\mathbf{E}_{bb}) \mathbf{c}_{bb}] \frac{\exp(-j2\pi f_0 \tau)}{R} \right]^T \mathbf{0}_{\lceil T_r F_s \rceil - \lceil T_e F_s \rceil - \lceil \tau F_s \rceil}^T \right]^T \quad (\text{B.21})$$

où, \mathbf{c}_{bb} et \mathbf{E}_{bb} sont les vecteurs échantillonnés associés à $c_{bb}(f)$ et $E_{bb}(f)$. TFD correspond à la transformée de fourier numérique.

Annexe B. Modélisation des signaux SAR

Annexe C

Démonstration de l'orthonormalité du produit de deux matrices

C.1 Variables, hypothèses et propriétés

Soit $E(f)$ le spectre d'un signal tel que :

$$\begin{cases} |E(f)| = 1 \text{ (ou constant)}, \text{ si } f \in [f_0 - B/2, f_0 + B/2] \\ |E(f)| = 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où B est la largeur de bande du signal et f_0 sa fréquence centrale. Soit $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^N$ le vecteur contenant les échantillons de $E(f)$, décalé en bande de base, représenté sur une plage de fréquence de Δ_f ($\Delta_f > B$). Posons

$$D = \lceil N \frac{1 - B/\Delta_f}{2} \rceil, \quad (\text{C.2})$$

et $\mathbf{E}_{NN} \in \mathbb{C}^{N-2D}$ le vecteur non nul, tel que chaque élément de \mathbf{E}_{NN} soit de module 1 (ou constant) et le vecteur \mathbf{E} s'écrive sous la forme :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_D \\ \mathbf{E}_{NN} \\ \mathbf{0}_D \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Soit $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^N$ le vecteur contenant les coefficients de réflexion échantillonnés sur la plage de fréquence Δ_f , correspondant à un diffuseur orienté suivant (α, β) , sous une incidence issue d'une position u_k d'un émetteur. On considère que les échantillons ne correspondant pas à la plage de fréquence B sont nuls, c'est à dire qu'on a $\hat{\mathbf{c}}_k(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^{N-2D}$ non nul, tel que :

$$\mathbf{c}_k(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_D \\ \hat{\mathbf{c}}_k(\alpha, \beta) \\ \mathbf{0}_D \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Soit $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{nN \times PQ}$, la matrice définie comme suit :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{c}_1(\alpha_P, \beta_Q) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{c}_n(\alpha_1, \beta_1) & \dots & \mathbf{c}_n(\alpha_P, \beta_Q) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Sa SVD s'écrit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}_C \mathbf{\Sigma}_C \mathbf{V}_C^\dagger \quad (\text{C.6})$$

avec \mathbf{U}_C et \mathbf{V}_C deux matrices unitaires et $\mathbf{\Sigma}_C$ matrice diagonale. On veut montrer que :

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \text{diag}(\mathbf{E}) \end{bmatrix} \mathbf{U}_C \quad (\text{C.7})$$

est orthonormale.

C.2 Démonstration

On définit les $\mathbf{u}_{ij}^c \in \mathbb{C}^N$, $(i, j) \in [1, n] \times [1, PQ]$, tels que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11}^c & \dots & \mathbf{u}_{1(PQ)}^c \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{u}_{n1}^c & \dots & \mathbf{u}_{n(PQ)}^c \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Par construction, chaque \mathbf{u}_{ij}^c peut s'écrire en fonction de $\hat{\mathbf{u}}_{ij}^c \in \mathbb{C}^{N-2D}$:

$$\mathbf{u}_{ij}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_D \\ \hat{\mathbf{u}}_{ij}^c \\ \mathbf{0}_D \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

C.2.1 Orthogonalité

Montrons que pour tout $(i, j) \in [1, PQ]^2$, $i \neq j$,

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{1i}^c \\ \dots \\ \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{ni}^c \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{1j}^c \\ \dots \\ \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{nj}^c \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.10})$$

On a :

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{1i}^c \\ \dots \\ \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{ni}^c \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{1j}^c \\ \dots \\ \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{nj}^c \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_{ki}^c{}^\dagger (\text{diag}(\mathbf{E}))^\dagger \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{kj}^c. \quad (\text{C.11})$$

On déduit de (C.3) que :

$$\text{diag}(\mathbf{E})^\dagger \text{diag}(\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{0}_D) & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{I}_{N-2D} & \\ \mathbf{0} & & \text{diag}(\mathbf{0}_D) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

De (C.9) et (C.12), on obtient :

$$\text{diag}(\mathbf{E})^\dagger \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{kj}^c = \mathbf{u}_{kj}^c \quad (\text{C.13})$$

Comme la matrice \mathbf{U}_C est unitaire, d'après (C.11) et (C.13), on a bien :

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{1i}^c \\ \dots \\ \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{ni}^c \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{1j}^c \\ \dots \\ \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{nj}^c \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.14})$$

La matrice

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \text{diag}(\mathbf{E}) \end{bmatrix} \mathbf{U}_C \quad (\text{C.15})$$

est donc bien orthogonale.

C.2.2 Orthonormalité

Sur le même principe que la partie précédente, on montre que pour tout i ,

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{1i}^c \\ \dots \\ \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{ni}^c \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{1i}^c \\ \dots \\ \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{ni}^c \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_{ki}^c{}^\dagger (\text{diag}(\mathbf{E}))^\dagger \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{u}_{ki}^c \quad (\text{C.16})$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_{ki}^c{}^\dagger \mathbf{u}_{ki}^c = 1. \quad (\text{C.17})$$

D'après la partie précédente et (C.17), on a donc bien

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{E}) & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \text{diag}(\mathbf{E}) \end{bmatrix} \mathbf{U}_C \quad (\text{C.18})$$

matrice orthonormale.

Annexe C. Démonstration de l'orthonormalité du produit de deux matrices

Annexe D

Démonstration de l'équivalence entre un produit de vecteur et une convolution cyclique

D.1 Variables, hypothèses et propriétés

Posons $\mathbf{h}_i \in \mathbb{C}^N$ et $\tilde{\mathbf{h}}_i \in \mathbb{C}^n$, $n < N$, tels que :

$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{D_i} \\ \tilde{\mathbf{h}}_i \\ \mathbf{0}_{N-n-D_i} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

et

$$\tilde{\mathbf{h}}_i = \mathbf{e} \odot \mathbf{f}_i \quad (\text{D.2})$$

où \mathbf{e} et \mathbf{f}_i sont deux vecteurs de \mathbb{C}^n . Posons $\hat{\mathbf{h}}_i$, $\hat{\mathbf{e}}$ et $\hat{\mathbf{f}}_i$ les vecteurs de \mathbb{C}^N , d'éléments $\hat{h}_i(k)$, $\hat{e}(k)$ et $\hat{f}_i(k)$, tels que :

$$\hat{\mathbf{h}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_i \\ \mathbf{0}_{N-n} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{0}_{N-n} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{0}_{N-n} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

On a bien :

$$\hat{\mathbf{h}}_i = \hat{\mathbf{e}} \odot \hat{\mathbf{f}}_i \quad (\text{D.4})$$

Soit $\underline{\hat{\mathbf{h}}}_i$, $\underline{\hat{\mathbf{e}}}$ et $\underline{\hat{\mathbf{f}}}_i$ les vecteurs de \mathbb{C}^N tels que :

$$\underline{\hat{\mathbf{h}}}_i^* = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{h}}_i)) \quad (\text{D.5})$$

$$\underline{\hat{\mathbf{e}}}^* = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{e}})) \quad (\text{D.6})$$

$$\underline{\hat{\mathbf{f}}}_i^* = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{f}}_i)). \quad (\text{D.7})$$

Hypothèse : il faut que \mathbf{z} contienne suffisamment d'élément à 0 au début ou à la fin pour que le vecteur contenant les N premiers éléments du produit de convolution numérique entre \mathbf{z} et $\hat{\mathbf{h}}_i$ soit le même que celui contenant les éléments résultant de produit de convolution cyclique.

$$\mathbf{h}_i^\dagger \mathbf{z} = y(D_i) \quad (\text{D.8})$$

Où $y(k)$ est le k ième élément du vecteur \mathbf{y} défini comme suit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} \odot \hat{\mathbf{e}}^* \odot \hat{\mathbf{f}}_i^* \quad (\text{D.9})$$

D.2 Démonstration

On a :

$$\mathbf{h}_i^\dagger \mathbf{z} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}_i^*(k) z(D_i + k) \quad (\text{D.10})$$

$$= \sum_{k=-N+1}^0 \hat{h}_i^*(-k) z(D_i - k) \quad (\text{D.11})$$

$$(\text{D.12})$$

Si on pose $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^N$, d'éléments $\hat{y}(k)$ tel que :

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{h}}_i^* \odot \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{D.13})$$

et si l'hypothèse posée précédemment est vérifiée, on a :

$$\mathbf{h}_i^\dagger \mathbf{z} = \hat{y}(D_i). \quad (\text{D.14})$$

or :

$$\hat{\mathbf{h}}_i^* = \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{h}}_i)) \quad (\text{D.15})$$

$$= \text{TFD}^{-1}(\text{TFD}^*(\hat{\mathbf{e}}) \text{TFD}^*(\hat{\mathbf{f}}_i)) \quad (\text{D.16})$$

$$= \hat{\mathbf{e}}^* \odot \hat{\mathbf{f}}_i^*, \quad (\text{D.17})$$

on a donc d'après (D.9) et (D.17) :

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{D.18})$$

et donc

$$\mathbf{h}_i^\dagger \mathbf{z} = y(D_i). \quad (\text{D.19})$$

Publications

Revue à comité de lecture

- R. Durand, G. Ginolhac, L. Thirion, P. Forster, *New SAR processor based on Matched Subspace Detectors*, IEEE trans. on Aerospace and Electronics Systems (accepté).

Conférence à comité de lecture

- R. Durand, G. Ginolhac, P. Forster, L. Thirion, M. Lesturgie, *Algorithme de synthèse d'ouverture basé sur un détecteur de sous espace*, GRETSI 2005, Louvain la Neuve, Septembre 2005.
- R. Durand, G. Ginolhac, P. Forster, L. Thirion, *Detection of a target hidden in a forest : Performance of a SAR processor based on a subspace detector*, EUSAR 2006, Dresden, Allemagne, Mai 2006.
- R. Durand, G. Ginolhac, L. Thirion, P. Forster, *Man Made Target Detection in a Forest with a subspace SAR processor*, IGARSS 2006, Denver, Colorado, USA, Juillet 2006.
- R. Durand, G. Ginolhac, P. Forster, L. Thirion, *New SAR processor based on a subspace detector*, EUSIPCO 2006, Florence, Italie, Septembre 2006.
- R. Durand, G. Ginolhac, L. Thirion, P. Forster, *Implementation and Optimisation of a SAR processor based on a subspace detector*, International SAR & SAS Conference, Lercici, Italie, Septembre 2006.
- R. Durand, G. Ginolhac, P. Forster, L. Thirion, *SAR processor based on Signal or Interference Subspace Detector Matched to Man Made Target in a Forest*, ICASSP 2007, Hawaii, USA, Avril 2007.

Publications

Bibliographie

- [1] H.C. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*, Dover Publications, Inc., 1981.
- [2] E. Colin, *Apport de la polarimétrie à l'interférométrie radar pour l'estimation des hauteurs de cibles et de paramètres de forêt*, Rapport de thèse, ONERA - Univ. Paris VI, 2005.
- [3] E. Colin, C. Titin-Schnaider, W. Tabbara, *Coherence optimization methods for scattering centers separation in polarimetric interferometry*, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol 19(9), pp :1237-1250, septembre 2005.
- [4] M. Tria, *Imagerie Radar à Synthèse d'Ouverture par analyse en ondelettes continues multidimensionnelles*, Rapport de thèse, ONERA - Univ. Paris XI, 2005.
- [5] E. Colin, M. Tria, C. Titin-Schnaider, J.P. Ovarlez, M. Benidir, *SAR imaging using multidimensional continuous wavelet transform and applications to polarimetry and interferometry*, International Journal of Imaging Systems and Technology, vol. 14, issue 5, pp : 206-212, mars 2005.
- [6] M. Allen, J.M. Jauregui, L.E. Hoff, *FOPEN-SAR Detection by direct use of simple scattering physics*, IEEE International Radar Conference, mai 1995.
- [7] A. Sharma, R.L. Moses, *Matched subspace detectors for discrimination of targets from trees in SAR imagery*, Signal, Systems and Computer 2000, Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference, vol. 2, Issue 2, pp : 1721 - 1726, novembre 2000.
- [8] L.L. Scharf, *Statistical signal processing : detection, estimation and time series analysis*, Addison-Wesley Publishing Co., 1990.
- [9] L.L. Scharf, B. Friedlander, *Matched subspace detectors*, IEEE trans. on Signal Processing, vol. 42, n° 8, pp : 2146-2157, Août 1994.
- [10] S. Kraut, L.L. Scharf, L.T. McWhorter, *Adaptive subspace detector*, IEEE trans. on Signal Processing, vol. 49, n° 1, pp : 1-16, janvier 2001.
- [11] M. Soumekh, *Synthetic aperture radar signal processing*. John Wiley & Sons, inc, 1999.
- [12] M. Soumekh, *Fourier array imaging*, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [13] R.H. Stolt, *Migration by Fourier transform*, Geophysics, vol. 43, pp : 23-48, janvier 1978.
- [14] W.W. Irving, R.B. Washburn, W.E.L. Grimson, *Bounding performance of peak-based target detectors*, SPIE, vol. 3070, pp : 245-257, avril 1997.
- [15] O. Besson, L.L. Scharf, F. Vincent, *Matched direction detectors and estimators for array processing with subspace steering vector uncertainties*, IEEE trans. on Signal Processing, vol. 49, n° 5, pp : 4453-4463, décembre 2005.
- [16] S. Provost, E. Rudiuk, *The exact distribution of indefinite quadratic forms in non central normal vectors*, Annal of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. 48, n° 2, pp : 381-394, juin 1996.
- [17] R.W. Butler, M.S. Paoletta, *Calculating the density and the distribution function for the singly and doubly noncentral F*, Statistics and computing, vol. 12, n° 1, pp : 9-16, janvier 2002.

Bibliographie

- [18] D.W. Hawkins, *Synthetic aperture imaging algorithms with application to wide bandwidth sonar*, Rapport de thèse, Univ. de Canterbury, Nouvelle Zélande, 1996.
- [19] P. T. Gough, D. W. Hawkins, *Imaging algorithms for a strip-map synthetic aperture sonar : Minimizing the effects of aperture errors and aperture undersampling*, IEEE Journal of Oceanic Engineering, vol. 22, pp. 27-39, janvier 1997.
- [20] T. Rastello, *Synthèse des méthodes d'inversion dans le domaine de Fourier*, Rapport de thèse, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, 1998.
- [21] P. Forster, *Generalized rectification of cross spectral matrices for array of arbitrary geometry*, IEEE trans. on Signal Processing, vol. 49, n^o5, mai 2001.
- [22] L. Thirion, E. Colin, *On the use of a coherent scattering model to determine the origin of artificial signatures of a target hidden in a forest*, PolInSAR, Frascati, Italie, 2005.
- [23] M. Dehmollaian, K. Sarabandi, *A forward scattering model for foliage camouflaged complex target*, IGARSS 04, Proceedings 2004, IEEE International, vol. 1, pp : 258-261, sept. 2004.
- [24] F.T. Ulaby, C. Elachi, *Radar polarimetry for geoscience application*. F.T.Ulaby, C.Elachi Editors, 1990.
- [25] H.L. Van Trees. *Estimation and Modulation Theory*, vol. 1, John Wiley and Sons, inc.
- [26] S.R. Cloude, M.L. Williams, *Target detection beneath foliage using polarimetric synthetic aperture radar interferometry*, Waves in Random Media, vol. 14, n^o2, pp : S393-S414, 2004.
- [27] S.R. Cloude, *FOPEN using polarimetric SAR interferometry*, EUSAR 2004, pp : 255-262, Ulm, Allemagne, mai 2004.
- [28] L. Thirion, I. Chênerie, C. Galy, *Application of a coherent model in simulating the backscattering coefficient of mangrove forest*, Waves in Random Media, vol. 14, n^o2, pp : S299-S316, avril 2004.
- [29] *Feko, User's Manual*, EM Software and System, juin 2004
- [30] L. Thirion, E. Colin, C. Dahon, *Capabilities of a forest coherent scattering model applied to radiometry, interferometry and polarimetry at P- and L-band* IEEE trans. in Geoscience and Remote Sensing, vol. 44, Issue 4, pp : 849 - 862, avril 2006.
- [31] F.T. Ulaby, M.A. El-Rayes, *Microwave Dielectric spectrum of vegetation. Part II : Dual Dispersion model*, IEEE Tans. on Geoscience and Remote Sensing, vol. 25 , n^o 5 , pp : 550-557, 1987.
- [32] F. Bandiera, M. Jahangir, G. Ricci, R. Verrienti, *Adaptative radar detection without secondary data : exploiting a diversity idea*, EUSIPCO 2006, Florence, Italie, septembre 2006.